TRANSFORMACIONES

Introducción

Aquí llamaremos transformación a una función que hace corresponder cada punto del espacio con otro punto del (mismo) espacio.

$\underline{P} = \boldsymbol{T}(P)$

Ahora, ¿a que nos referimos con punto y espacio? En computación gráfica modelamos el espacio euclídeo, tridimensional, común y silvestre, pero en matemáticas los conceptos de punto y espacio tienen que ver con cuestiones más complicadas sobre conjuntos, topologías y métricas. No podemos (ni debemos) meternos aquí en la generalidad del tema, pero necesitamos utilizar (aprovechar) algunos desarrollos matemáticos.

En principio, uno podría realizar cualquier transformación sobre todos los puntos de un objeto, una continua (botella → botella con un nudo en el cuello) o una discontinua (botella → botella rota), pero aquí trataremos con un conjunto limitado solamente a unas pocas transformaciones continuas: mover, estirar, rotar y proyectar un objeto. Esas operaciones tienen la ventaja de que se pueden representar con una matriz y que se pueden combinar multiplicando de antemano las matrices de transformación, y así evitar la miríada de operaciones que llevaría hacerlas una por una. Cualquier transformación *ad-hoc,* que no sea representable mediante matrices, también puede realizarse, pero en un procedimiento aparte que deberá ser programado para tal fin.

Para acumular todas estas transformaciones en una misma matriz necesitamos revisar algunos conceptos conocidos y a partir de ellos analizar algunos que seguramente no se han visto previamente.

Notación:

Reales: (a) minúsculas o (α) griegas
Intervalo [a,b) entre corchetes o paréntesis según el estándar cerrado/abierto.
Puntos: (P) mayúsculas.
Vectores: **v** minúsculas negritas, de componentes reales v^i ordenadas en columna.
Matrices: **a** minúsculas negritas, de componentes reales a^i_j en la fila i y columna j; la columna $\mathbf{a}_j$ es un vector.
Transformaciones: (***A***) mayúsculas inclinadas.
Punto o vector transformado: ($\underline{P}$ o $\underline{\mathbf{v}}$) subrayado
Conjunto o coordenadas o componentes: {a,b,c} o {x,y,z} entre llaves y horizontal, aunque sea un vector columna.
Delta de Kronecker o tensor delta: δ_{ij} un real que vale 1 si i=j y 0 si i≠j. Matriz identidad: δ^i_j idem pero con filas y columnas.

Por medio de $\Sigma_j^n a^i_j v^j$ se representa el producto estándar de una matriz por un vector columna. La sumatoria se hace para los n índices j variando de 1 a n o bien de 0 a n-1 (C++). Cuando resulta obvio se omiten la n, o la j o incluso la sumatoria; según la convención de Einstein se considera que hay una sumatoria por cada par de índices iguales si uno es subíndice y el otro superíndice: en R^n, $a^i_j v^j \equiv \Sigma_j^n a^i_j v^j$. Los elementos a sumar pueden no ser reales, ej.: $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ indica que **v** es un vector formado por la suma de los n productos de sus componentes reales v^i y los vectores de la base $\mathbf{e}_i$. Lo que hay que tratar e ver es que, en esos productos no−conmutativos, el primer término aporta una fila y el segundo una columna, para dar como resultado la suma de los productos de las componentes en orden.

Las confusiones son las potencias, de números o conjuntos que podrían confundirse con superíndices, R^n es "R a la n", el espacio vectorial real de n dimensiones. Para evitar las confusiones, las potencias suelen ponerse después de encerrar las componentes entre paréntesis: $(v^j)^2$, pero se pueden omitir cuando resulte obvio, ej.: R^n, $\mathbf{v}^2$ o $\mathbf{a}^{-1}$.

La distinción entre subíndices (índice de columna o ítem) y superíndices (índice de fila o de componente cartesiana) es seguramente algo novedoso y complicado, pero es un salvavidas para simplificar el algebra de matrices, que usaremos aquí y la de tensores no-euclídeos, que pueden llegar a usar en materias con mayor contenido teórico o físico.

Con más rigor habría que distinguir los vectores columna estándar de sus duales, las 1-formas o vectores fila; las normales, los coeficientes del plano y otras entidades, como los gradientes, caen en ésta última denominación. Asimismo, los tensores con dos subíndices (2-formas o formas bilineales) o dos superíndices, no deberían confundirse con matrices, aunque suelen identificarse con matrices transpuestas por la forma en que operan. Si se miran bien las ecuaciones que siguen, cada superíndice hace que la entidad transforme como los vectores (contravariante) mientras que cada subíndice hace que transforme con la transformación inversa (covariante). Pero todo esto se suele pasar por alto en el espacio euclideano.

Espacio Vectorial lineal, combinación lineal y transformación lineal

En el espacio vectorial R^n los elementos son vectores, n–uplas de números reales y se definen las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar, con una determinada axiomática. Con esas dos operaciones se puede realizar una combinación lineal de m vectores:

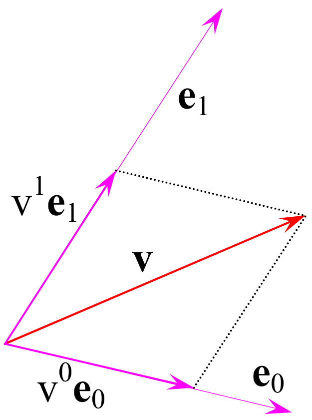
$$\mathbf{v} = \sum^m \alpha^i \, \mathbf{v}_i$$

El espacio vectorial n-dimensional se caracteriza mediante una base de n vectores $\mathbf{e}_i$ linealmente independientes (LI). Un conjunto de vectores es LI si ninguno se puede escribir como combinación lineal del resto:

$$\{\mathbf{e}_i\},\ i \in [0,n) \text{ es LI} \Leftrightarrow \left(\sum^n \alpha^i \, \mathbf{e}_i = 0 \Rightarrow \alpha^i = 0 \right) \quad \text{(no se puede despejar uno en función del resto)}$$

Cualquier otro vector se puede escribir como una combinación lineal de esos vectores base y los coeficientes son las componentes:

$$\mathbf{v} = v^j \, \mathbf{e}_j$$



En la base elegida, cada uno de los $\mathbf{e}_j$ es un vector de componentes $\{\delta^i_j\}$.

Llamemos “transformación” a una función vectorial de variable vectorial; que hace corresponder un nuevo vector a cada vector del espacio:

$$\underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{T}(\mathbf{v})$$

También se les asignarán vectores transformados a los vectores de la base:

$$\underline{\mathbf{e}}_j = \boldsymbol{T}(\mathbf{e}_j)$$

Cada vector base transformado se puede representar en la base original mediante sus componentes:

$$\underline{\mathbf{e}}_j = \underline{e}^i_j \, \mathbf{e}_i$$

Una transformación es lineal cuando preserva la combinación lineal:

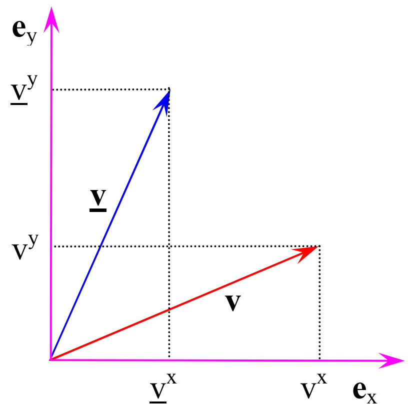
$$\underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{L}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{L}\left(\sum^m \alpha^i \, \mathbf{v}_i\right) \qquad \boldsymbol{L} \text{ es lineal} \Leftrightarrow \boldsymbol{L}\left(\sum^m \alpha^i \, \mathbf{v}_i\right) = \sum^m \alpha^i \, \boldsymbol{L}(\mathbf{v}_i)$$

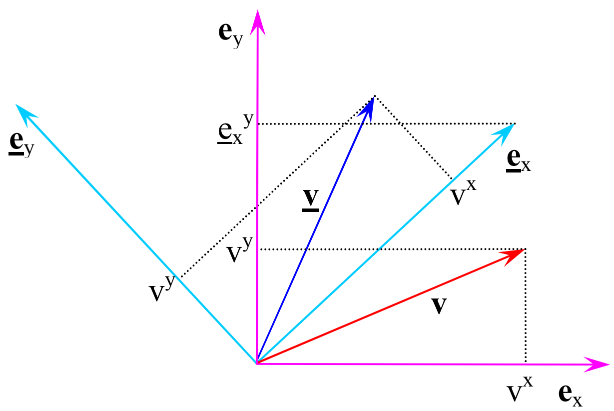
Como todo vector es combinación lineal de la base, al hacer una transformación lineal, un vector cualquiera $\mathbf{v}$ se transforma en $\underline{\mathbf{v}}$ mediante:

$$\underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{L}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{L}(v^j \, \mathbf{e}_j) = v^j \, \boldsymbol{L}(\mathbf{e}_j) = v^j \, \underline{\mathbf{e}}_j = v^j \, \underline{e}^i_j \, \mathbf{e}_i$$

Los vectores $\underline{\mathbf{e}}_j$ pueden verse como una nueva base de componentes $\{\underline{e}^i_j\}$ en la vieja base, la original.

Hay dos formas totalmente equivalentes de ver la misma transformación:





- El vector transformado tiene nuevas componentes en el espacio original:

$$\underline{\mathbf{v}} = (v^j \, \underline{e}^i_j) \, \mathbf{e}_i \quad : \quad \underline{\mathbf{v}} = \underline{v}^i \, \mathbf{e}_i \qquad (\underline{v}^i = v^j \, \underline{e}^i_j) \qquad \text{(transformación de las componentes)}$$

- El vector transformado tiene las mismas componentes, pero en la base transformada:

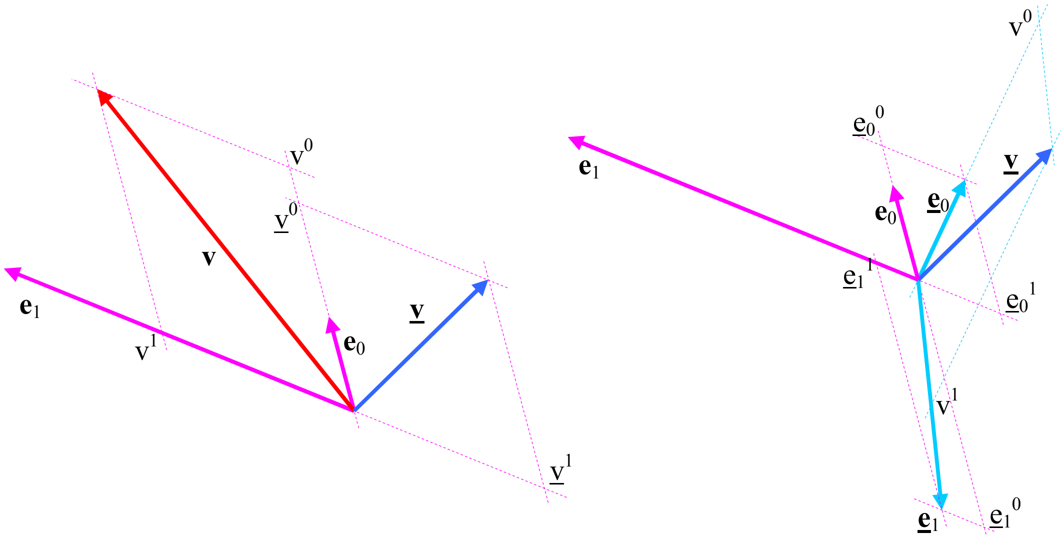
$$\underline{\mathbf{v}} = v^j \, (\underline{e}^i_j \, \mathbf{e}_i) \quad : \quad \underline{\mathbf{v}} = v^j \, \underline{\mathbf{e}}_j \qquad (\underline{\mathbf{e}}_j = \underline{e}^i_j \, \mathbf{e}_i) \qquad \text{(transformación de la base)}$$

En computación grafica se utiliza la segunda interpretación: se acomoda un nuevo sistema de coordenadas en el actual[1].

[1] Es difícil evitar la confusión entre transformación y cambio de base. En un cambio de base el vector sigue siendo el mismo, en una transformación el vector cambia. La figura de la derecha “parece” un cambio de base pero no lo es: la nueva base ve al vector transformado, no al viejo

El conjunto de componentes $\underline{e}_j^{\,i}$ de la base transformada vista desde la base original, forma una matriz que es la matriz de la transformación lineal. En la figura de la derecha, $\underline{\mathbf{e}}_x = \underline{e}_x^{\,x}\,\mathbf{e}_x + \underline{e}_x^{\,y}\,\mathbf{e}_y$, donde $\underline{e}_x^{\,y}$ (la única indicada) es la componente y del vector base transformado $\underline{\mathbf{e}}_x$, sobre el eje y original. Cada vector base $\underline{\mathbf{e}}_i$ es una columna, la matriz se arma con las tres columnas $\{\underline{\mathbf{e}}_x, \underline{\mathbf{e}}_y, \underline{\mathbf{e}}_z\}$.

En los dibujos de arriba la transformación es un giro y las bases ortonormales, pero podría haber sido cualquier otra transformación lineal en cualquier otra base, podrían haberse estirado los vectores y cambiado el ángulo entre ellos.



Vimos que toda transformación lineal puede representarse mediante una matriz, cabe preguntarse si toda matriz representa una transformación. La respuesta es sí: Tomamos las n columnas como componentes de n vectores y con ellos construimos la nueva base. Si las columnas no son LI no pueden ser una base en sentido estricto, pero aún así podemos usarlas (ej: proyecciones). Por lo tanto: **Toda matriz puede verse como una transformación lineal. La transformación lineal de un vector puede realizarse premultiplicándolo por una matriz de nxn <u>números</u> reales en n dimensiones**.

Cuidado: En y=kx, y es una función lineal de x. Pero claro, sólo cuando k es una constante, si k=sin(x) o k=3x, por ejemplo, ya deja de ser una función lineal. Lo mismo sucede con las matrices, estamos hablando de matrices de números y no de matrices cuyos elementos son funciones de las coordenadas. Los números sí podrían ser función de uno o más parámetros, por ejemplo ángulo o tiempo, pero a ángulo o tiempo fijo queda fija la transformación lineal. No pueden depender de las coordenadas.

Remarcamos por su importancia: Si vemos una matriz de transformación (lineal o no), para entenderla tomamos las columnas como nueva base y así podemos deducir fácilmente su efecto sobre los objetos. Por otro lado, si necesitamos armar la matriz de una dada transformación, ponemos como columnas a los vectores base transformados. La transformación será lineal si la matriz no depende de coordenadas.

- Haga usted mismo un ejemplo bidimensional para entender como los vectores de la base transformada arman la matriz de transformación y luego multiplíquela por las componentes de un vector cualquiera para ver como se transforma.

- Verifique, en dos dimensiones, el deslizamiento de un cuadrado unitario, con una matriz que difiere de la unidad solo en el elemento $\underline{e}_2^{\,1} = \tan(30°)$ (fila 1 columna 2) y otra con el mismo valor pero en $\underline{e}_1^{\,2}$.

Composición de transformaciones y combinación:

La composición es la aplicación de sucesivas transformaciones (***A***, ***B***, ***C***, …) a los vectores originales.
La combinación (***Z***) es una sola transformación que produce el mismo resultado que una composición:

$$\underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}(\mathbf{v}))) = \boldsymbol{Z}(\mathbf{v})$$

Si todas las transformaciones son lineales podemos representarlas por medio de matrices:

$$\underline{v}^h = (\textstyle\sum_k c^h{}_k\,(\sum_j b^k{}_j\,(\sum_i a^j{}_i\,v^i))) \equiv c^h{}_k\,(b^k{}_j\,(a^j{}_i\,v^i)) = c^h{}_k\,b^k{}_j\,a^j{}_i\,v^i = z^h{}_i\,v^i$$

$$z^h{}_i = c^h{}_k\,b^k{}_j\,a^j{}_i$$

En forma matricial:

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}\;\mathbf{b}\;\mathbf{a}$$

Se puede ver muy fácilmente que las transformaciones no son conmutativas, la rotación de un cuadrado centrado en el origen, seguida de una escala no uniforme da un rombo, mientras que si se invierte el orden da un rectángulo girado. La representación matricial refleja exactamente ese hecho, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Para determinar el orden de las transformaciones, notar que **se aplica primero "la más cercana a v"** y que para la multiplicación se pueden hacer asociaciones mientras se mantenga el orden de aplicación:

$c^l_k\, b^k_j\, a^j_i = c^l_k\, (b^k_j\, a^j_i) = (c^l_k\, b^k_j)\, a^j_i \qquad (\neq c^l_k\, b^j_i\, a^k_j)$

$\mathbf{c\ b\ a = c\ (b\ a) = (c\ b)\ a} \qquad (\neq \mathbf{c\ a\ b})$

La composición se puede mirar de dos maneras, como ya se explicó: una es la que acabamos de ver, una serie se transformaciones en orden a, b, c, sobre las coordenadas del vector original. La otra es una serie de transformaciones de la base en orden inverso: c, b, a.

$\underline{\mathbf{v}} = \underline{v}^h\, \mathbf{e}_h = \mathbf{e}_h\, (c^h_k\, b^k_j\, a^j_i\, v^i) \quad : \quad \underline{v}^h = (c^h_k\, (b^k_j\, (a^j_i\, v^i))) \qquad \leftarrow$

$\underline{\mathbf{v}} = v^i\, \underline{\mathbf{e}}_i = (\mathbf{e}_h\, c^h_k\, b^k_j\, a^j_i)\, v^i \quad : \quad \underline{\mathbf{e}}_i = (((\mathbf{e}_h\, c^h_k)\, b^k_j)\, a^j_i) \qquad \rightarrow$

Métrica y orientación

Sin entrar en excesivos tecnicismos matemáticos, diremos que una **métrica** es una receta para definir la distancia entre elementos de un conjunto, mientras que una **norma** mide la longitud o módulo de un vector. La métrica se refiere a pares de elementos de un conjunto y la norma a un elemento de un espacio vectorial. La distancia es un real y la norma un escalar (real o complejo según el tipo de espacio) y en ambos casos, en general, se pide que sea mayor o igual que cero y otros requisitos.

Algunas normas que ya hemos usado se reducen a las p-normas o normas L_p:

$|\mathbf{v}| = \sqrt[p]{\Sigma(v^i)^p}$;

que para p=2 es la norma euclídea, para p=1 la del taxi y para $p \to \infty$ la del máximo.

Ahora, si miramos con detenimiento lo que hemos dicho sobre las bases en R^n, veremos que no hay forma de definir una base. ¿En que base defino los vectores base? ¡Huevo y gallina! Los vectores base "siempre" tienen longitud unitaria en norma L_p (las componentes son δ_i^j) pero "para nosotros" no siempre son unitarios. La norma L_2 es el teorema de Pitágoras, pero no dice lo que esperamos que diga en bases de longitud distinta y no−perpendiculares. Cuando pasan estas cosas la solución siempre es imponer axiomas; en nuestro caso los de Euclides, pero necesitamos una definición más.

Al espacio vectorial R^n se le asigna un producto escalar o interno o producto punto entre vectores (con determinada axiomática, en particular la linearidad y la simetría) cuyo resultado es un número real:

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = (u^i\, \mathbf{e}_i)\cdot(v^j\, \mathbf{e}_j) = u^i\, v^j\, (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j) = g_{ij}\, u^i\, v^j$

Los productos escalares de los elementos de la base ($\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i = g_{ij} = g_{ji}$) forman un conjunto simétrico de números reales, arbitrariamente impuestos, que recibe el nombre de forma bilineal o tensor métrico. Si el tensor es definido positivo (el resultado es mayor o igual que cero) el producto escalar induce una norma y ésta induce una métrica:

$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^2} \qquad d(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$

Dos vectores se dicen ortogonales cuando su producto escalar es nulo y un vector se dice que está normalizado y se denomina versor, cuando su módulo es uno. Cualquier vector se puede "normalizar":

$\mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$

El ángulo [0º,180º] entre dos vectores, ninguno nulo, está también definido por el producto escalar:

$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}_{(1)}\cdot\mathbf{v}_{(1)}$

Ahora podemos dar sentido estándar a las medidas en las bases inclinadas y estiradas; definiendo las longitudes y ángulos "que nosotros medimos" en la base. "Nuestra" referencia estándar para medir es **espacio euclídeo**, que se define mediante la métrica euclídea inducida por la forma bilineal:

$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

La base es ortonormal por definición, está conformada por versores ortogonales; pero sólo en esta base "ortogonal" y "perpendicular" significan lo mismo. La norma inducida por la métrica euclídea es la norma euclídea L_2, para verlo basta con reemplazar $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ por $\delta_{ij} v^i v^j = \Sigma(v^i)^2$.

Partiendo desde ahí, al hacer una transformación lineal:

$$\underline{\mathbf{u}}\cdot\underline{\mathbf{v}} = u^i\, \underline{\mathbf{e}}_i \cdot v^j\, \underline{\mathbf{e}}_j = u^i\, \underline{e}_i^{\,k}\, \mathbf{e}_k \cdot v^j\, \underline{e}_j^{\,l}\, \mathbf{e}_l = u^i\, \underline{e}_i^{\,k}\, v^j\, \underline{e}_j^{\,l}\, \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = u^i\, \underline{e}_i^{\,k}\, v^j\, \underline{e}_j^{\,l}\, \delta_{kl}$$

$$\Rightarrow \underline{g}_{ij} = \delta_{kl}\, \underline{e}_i^{\,k}\, \underline{e}_j^{\,l}$$

El nuevo tensor métrico se construye con los productos escalares (euclídeos) de las nuevas bases:

$\underline{g}_{ij} = \underline{\mathbf{e}}_i \cdot \underline{\mathbf{e}}_j = \delta_{kl}\, \underline{e}_i^{\,k}\, \underline{e}_j^{\,l}$ (notar que no es un producto de matrices, δ_{kl} no es una matriz)

Una transformación lineal conservará las distancias si conserva los productos escalares entre vectores:

$$\underline{\mathbf{u}}\cdot\underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{O}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{O}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad\Rightarrow\quad \underline{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$$

Si una transformación lineal ***O*** conserva distancias en R^3 transforma un tetraedro manteniendo el juego de distancias, y por lo tanto también conserva los ángulos. Es decir que si se conserva el tensor métrico se mantienen las longitudes y ángulos de los vectores base y, por lo tanto, todos los demás. A este tipo de transformaciones se las denomina transformaciones rígidas pues no deforman los objetos. En el caso euclídeo, los vectores columna de la matriz de transformación deben ser ortonormales, una matriz de transformación ortogonal mantiene unitarios y perpendiculares los versores de la nueva base.

Además del producto escalar, se define el producto vectorial o producto cruz de vectores. En el espacio euclídeo tridimensional, el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, es el vector que tiene por norma al área del paralelogramo que definen los dos vectores: $|\mathbf{n}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\mathbf{u},\mathbf{v})$, es perpendicular a ambos y, por lo tanto, a cualquier combinación lineal de esos dos vectores ($\mathbf{n}\cdot(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = 0$); su dirección está definida por la regla de la mano derecha. Esta definición un tanto rara (en general las matemáticas no requieren de manos humanas) es justamente la que define la orientación derecha o izquierda de las ternas de vectores y los circuitos planos.

Con el producto vectorial y el escalar se define el triple producto escalar ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$) que es el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores. La formula del determinante para calcular el producto vectorial y el triple no es casualmente extraña (ver la definición de determinante en Wikipedia), también ahí hay huevo y gallina.

Algunas propiedades de las transformaciones lineales:

Podemos mencionar algunas propiedades importantes que ya deben haber sido estudiadas en álgebra.

La matriz identidad no cambia los vectores. La matriz $\lambda\delta_i^{\,j}$, con λ constante, sólo produce un escalado uniforme. La matriz nula anula todo el espacio.

Las transformaciones lineales conservan el vector nulo:

$\boldsymbol{L}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ es el vector de coordenadas $\{0,0,0\}$, que por cualquier matriz da lo mismo)

Si la transformación tiene rango menor que n, aplasta algunas dimensiones; sobreviven tantas como el rango. En efecto, si el rango es $r < n$, es porque hay n-r vectores base (columnas) que son combinación lineal de los r restantes (son coplanares o colineales). Reemplazando en la ecuación de componentes ($\mathbf{v}=v^j\mathbf{e}_j$) los n-r por las combinaciones de los otros, queda un espacio r-dimensional para representar todos los vectores transformados. En caso contrario, una matriz de rango n se puede invertir.

Los vectores paralelos a los autovectores sólo se escalan, esto es por la definición de autovector.

El determinante de la matriz mide el cambio de volumen (se puede demostrar con el triple producto y la transformación de un tetraedro). Las matrices ortogonales de determinante uno son rotaciones, si el determinante es −1 están combinadas con una reflexión (cambia derecha por izquierda).

Podemos definir funciones vectoriales y transformarlas. Las que sean combinaciones lineales se conservarán (el resultado de aplicar la misma función a los vectores transformados es el vector transformado del resultado original). Por ejemplo, $\mathbf{p}+\alpha\mathbf{t}$ define una recta mediante una obvia combinación lineal, por lo que se transforma en la recta: $\underline{\mathbf{p}}+\alpha\underline{\mathbf{t}}$. Un plano es una combinación lineal de tres vectores ($\mathbf{p}+\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$) y también se transforma en un plano.

Se puede armar un sistema de ecuaciones para mostrar que la intersección entre planos y/o rectas se conserva en la línea o punto transformado. Por lo tanto si no se interceptan tampoco lo harán sus transformadas. **La combinación lineal transforma planos en planos y rectas en rectas; paralelas en paralelas e interceptadas en otras que se interceptan en la transformada de la intersección.**

Espacio afín, combinación afín y transformación afín

Es muy difícil olvidar lo aprendido e incorporado a la forma de pensar, pero hagamos el esfuerzo de desligar los conceptos de punto y vector. Un punto será un lugar en el espacio y un vector será una dirección o un desplazamiento.

Para definir un vector en R^n son necesarias n coordenadas y una base de n vectores. La base no está ubicada en ningún "lugar", son sólo n vectores linealmente independientes. Para ubicar un punto necesitaremos <u>además</u> un origen o referencia un puntos sólo puede identificarse mediante un vector posición si se define una correspondencia entre el punto de referencia y el vector nulo, origen de coordenadas y si además se asigna significado a la base (este, norte, arriba).

Podemos decir que "el bar está dos cuadras al norte de la plaza". El bar y la plaza son puntos, lugares o posiciones; mientras que "dos cuadras al norte" es un vector, recorrido, desplazamiento. Normalmente, una dirección será identificada mediante un vector unitario. Podemos sumar recorridos o multiplicarlos por números, pero no podemos sumar ni multiplicar posiciones entre si ni con números. No tiene sentido decir: "el doble de la ubicación del bar" o "el bar mas la plaza"; pero sí se puede decir: "el doble del recorrido desde la plaza al bar". Pueden hacerse algunas sumas y multiplicaciones especiales que dan cosas como: "A mitad de camino entre P y Q". Vayamos a las definiciones.

El espacio afín A^n tiene vectores y además tiene puntos. Para definirlo se parte del espacio vectorial lineal R^n y se define una operación más: la diferencia entre puntos, que da un vector; o en forma equivalente, la suma de un punto y un vector da otro punto:

$$P - O = \mathbf{p}$$

$$P = O + \mathbf{p} \qquad (O = P - \mathbf{p} \equiv O = P + (-\mathbf{p}))$$

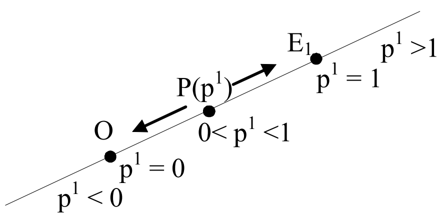
No se puede sumar puntos ni multiplicar puntos por escalares.

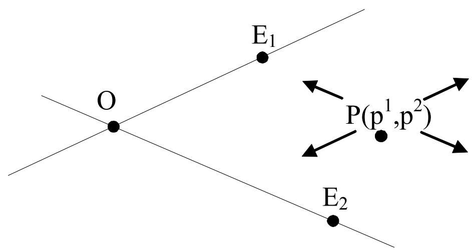
El vector (bar – plaza) = (200m al N) indica el camino de la plaza al bar: bar = plaza + (200m al N). En cambio, bar + plaza no tiene sentido, el doble de la plaza tampoco. El vector no está en la plaza: 200m al norte de mi casa hay un almacén, el vector (almacén − casa) es "exactamente el mismo" que (bar − plaza), en ambos casos el vector es (200m al N).

Los vectores no tienen punto de aplicación y los puntos no tienen componentes.

El espacio vectorial tenía la combinación lineal de vectores; el espacio afín también, pero además se puede realizar una combinación afín de puntos. Una combinación afín de n+1 puntos es un punto obtenido a través de una combinación lineal de n vectores. Sean O y $E_1 \ldots E_n$ los n+1 puntos dados, P es el punto resultante de la combinación afín. Cada vector es la diferencia con O:

$$(P - O) = \textstyle\sum^n p^i (E_i - O) \qquad \text{(combinación lineal de n vectores)}$$





La independencia afín (AI) de n+1 puntos es la independencia lineal (LI) de los n vectores:

$$\{E_i,O\} \text{ AI} \Leftrightarrow \{(E_i - O)\} \text{ LI} \Leftrightarrow (\textstyle\sum^m p^i (E_i - O) = \mathbf{0} \Rightarrow p^i = 0)$$

Por ejemplo: tres puntos tienen independencia afín si no están en la misma recta; cuatro puntos si no están en el mismo plano.

El "conjunto de combinaciones afines de dos puntos fijos" distintos o "expansión afín de dos puntos" define un espacio afín unidimensional (figura de la izquierda) más conocido como recta (o geodésica si la métrica no es la euclídea). Del mismo modo, la expansión afín de tres puntos no colineales define un espacio afín bidimensional (figura de la derecha, ~plano) y en general, **un espacio afín n-dimensional A^n queda definido por la expansión afín de n+1 puntos con independencia afín**.

Como se puede ver, el papel de los vectores $\{E_i - O\}$ en el espacio afín es exactamente el mismo que el de la base $\mathbf{e}_i$ en el espacio vectorial. Para asignar coordenadas a un punto se necesita entonces un punto O que llamaremos **origen** y una base $\{\mathbf{e}_i = E_i - O\}$ de vectores LI. El conjunto $\{O, \mathbf{e}_i\}$ se denomina

sistema de referencia. Un punto queda definido por el origen y el vector que lleva del origen al punto (el vector posición): $P = \sum^n p^i (E_i - O) + O = p^i \mathbf{e}_i + O = \mathbf{p} + O$

Notas:

1) El vector de componentes $\{p^i\}$ es el vector posición. Las confusiones provienen de identificar origen y vector nulo.

2) En algunas fuentes suele encontrarse a las coordenadas de puntos definidas como: $P = \{p^1, p^2, \dots, p^n, 1\}$, los p^i son multiplicados por la base y el 1 por el origen. Con esa notación, los vectores, independientes del origen, tienen componentes $\mathbf{v} = \{v^1, v^2, \dots, v^n, 0\}$. Esto puede confundir, pues no se puede multiplicar un escalar (1 o 0) por el punto O, más adelante veremos la interpretación proyectiva de esa forma de representación.

Las transformaciones afines de los puntos son aquellas que preservan las combinaciones afines; es decir, la combinación lineal de vectores; por lo tanto son las transformaciones lineales de los vectores:

$$\underline{P} = \boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{A}[\Sigma^n p^i \mathbf{e}_i + O] = \Sigma^n p^i \boldsymbol{L}(\mathbf{e}_i) + \boldsymbol{A}(O) = \Sigma^n p^i \underline{\mathbf{e}}_i + \underline{O} = \Sigma^n p^i (\underline{E}_i - \underline{O}) + \underline{O}$$

Se puede ver como una transformación lineal de vectores y una reubicación del origen o traslación.

Si representamos los nuevos puntos y vectores en la vieja base:

$$(\underline{P} - O)^j = \Sigma_i^n p^i (\Sigma_j^n \underline{e}_i^j \mathbf{e}_j) + (\underline{O} - O)^j$$

La transformación afín combina una transformación lineal y una translación, pero no puede representarse sólo con la matriz $\underline{e}_i^j = (\underline{E}_i - \underline{O})^j$ sino que requiere la ubicación $(\underline{O} - O)^j$ del nuevo origen.

Las transformaciones afines conservan las combinaciones afines, se conservan las proporciones: el punto medio entre dos puntos dados o el centroide de varios puntos se transforman en el punto medio o el centroide de los transformados. Las rectas y planos son expansión afín de dos o tres puntos y por lo tanto se transforman en rectas y planos. Transformando un paralelogramo o un paralelepípedo podemos ver que las paralelas siguen siendo paralelas y las intersecciones se conservan.

Ahora hagamos trampa:

Si hacemos "abuso del lenguaje algebraico" podemos expresar la combinación afín como suele encontrarse en muchos textos y como usaremos nosotros también:

$$P = \sum^n \alpha^i E_i - \sum^n \alpha^i O + O = \sum^n \alpha^i E_i - O \sum^n \alpha^i + O = \sum^n \alpha^i E_i + (1 - \sum^n \alpha^i) O.$$

Usamos α en lugar de p para remarcar que son sólo coeficientes de una combinación.

Siendo O el (n+1)ésimo punto dato, consideremos a $(1-\sum^n \alpha^i)$ como el (n+1)ésimo coeficiente:

$$E_{n+1} = O \qquad \alpha^{n+1} = 1 - \sum^n \alpha^i$$

Y llegamos a la forma estándar (simétrica y muy cómoda) de expresar una combinación afín:

$$P = \sum^{n+1} \alpha^i E_i \qquad \sum^{n+1} \alpha^i = 1$$

Esa forma es errónea porque no están definidas la multiplicación por un punto ($\alpha^i E_i$) ni la suma de puntos. Pero, por otro lado, es muy cómoda porque **identificamos los puntos con sus vectores posición** respecto de cualquier otro origen preexistente y a esas operaciones les damos sentido vectorial. Con ello podemos escribir el álgebra de una forma muy sencilla y simétrica, donde todos los puntos fijos adquieren el mismo significado: El punto O deja de ser especial y ni siquiera debe ser el origen de coordenadas (la otra razón para usar α en lugar de p). **Esta es la forma que utilizamos en computación gráfica**. Para "librarnos del mal" diremos que está permitido hacer combinaciones afines de puntos: combinaciones lineales cuyos coeficientes suman uno.

Con estas trampas, la transformación afín no cambia de forma, es una lineal más una traslación del origen, pero actúa sobre los vectores posición y la traslación mueve todos los puntos:

$$\underline{P} = \boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{L}(P) + \underline{\mathbf{o}} \qquad \underline{P}^i = \underline{e}_j^{\,i} P^j + \underline{o}^i$$

Síntesis de ideas útiles: Una combinación afín de vectores es lineal, una combinación afín de puntos es la lineal de sus vectores posición, pero los coeficientes suman uno, si no suman uno el resultado dependerá del origen. Mediante una combinación afín de dos puntos distintos podemos representar cualquier punto de la línea que definen. Tres puntos no alineados definen los puntos de su plano por combinación afín. Las transformaciones afines (lineales más traslación) preservan la combinación afín (el punto R a 1/3 de P y 2/3 de Q, pasa a otra posición $\underline{R}$ que está a 1/3 de $\underline{P}$ y 2/3 de $\underline{Q}$ transformados).

Normales y transformación de las normales:

La normal a una superficie es un vector perpendicular a los vectores tangentes en el punto. Parece trivial, pero la superficie es curva. Podemos definir vectores tangentes en un punto P de una superficie por medio del limite de una diferencia de puntos normalizada (dividida por el módulo):

$$\mathbf{u}(P) = \lim_{Q \to P} (Q-P)/|Q-P|$$

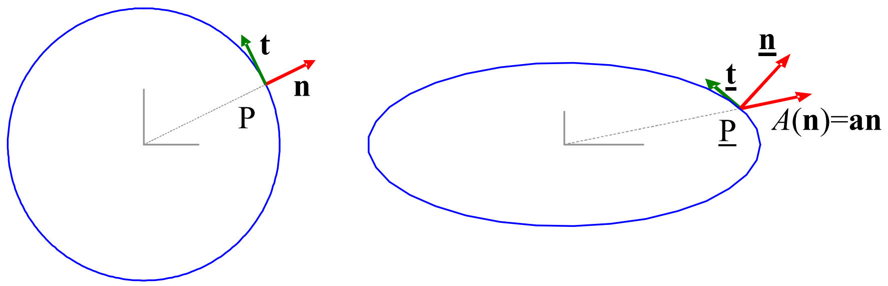
Para definir una tangente **u** a una superficie en un punto P, utilizamos otro punto Q de la superficie que se acerca a P desde cualquier dirección y define un vector unitario. Por cada dirección de llegada habrá una tangente distinta, límite de la secante Q−P. Con determinadas condiciones de suavidad (G^1) el límite existe y todas las tangentes serán coplanares. Con dos tangentes distintas (**u**,**v**) alcanza para definir el plano tangente que pasa por el punto ($P+\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$). Para una curva, habrá un único vector tangente que define la recta tangente a la curva en el punto.

El versor normal se define como el perpendicular a la recta o al plano tangente.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \qquad (\mathbf{t} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}\text{, es cualquier vector del plano tangente})$$

En una transformación afín la superficie se transforma en otra, posiblemente deformada, que es la transformada de sus puntos, pero el vector **n** transformado no es necesariamente perpendicular a la superficie transformada (visto desde "nuestro" espacio euclídeo). El plano tangente, en cambio, sí se transforma en un plano tangente, porque la transformación afín conserva la combinación afín cuyo límite utilizamos para definir las tangentes.

Si la transformación aplasta, no habrá tangente, ni normal, ni superficie, por lo tanto estamos hablando de transformaciones invertibles: dada la transformación **a** existe $\mathbf{a}^{-1}$.



Queremos un vector que sea normal en $\underline{P}$ a la superficie transformada por la matriz **a** (y que no es el vector normal **n** transformado como cualquier vector). Buscamos un nuevo vector perpendicular al plano tangente, que llamaremos $\underline{\mathbf{n}}$ pero es distinto de la transformada afín del vector $\boldsymbol{A}(\mathbf{n})$. Para conseguirlo en forma simple, partimos de una base euclídea (ortonormal) y usamos la interpretación que transforma las componentes. Si **t** es cualquier vector del plano tangente:

$$0 = n^i t^i = n^i [(\mathbf{a}^{-1})^i{}_j \underline{t}^j] = [(\mathbf{a}^{-1})^i{}_j n^i] \underline{t}^j = [((\mathbf{a}^{-1})^T)^j{}_i n^i] \underline{t}^j = \underline{n}^j \underline{t}^j$$

El segundo miembro es el producto escalar en el espacio euclídeo. En el tercero, se reemplaza a **t** por el vector $\underline{\mathbf{t}}$ anti-transformado. En el cuarto se reagrupa, pero el producto que queda entre $\mathbf{a}^{-1}$ y **n** no es un producto estándar matriz-vector, es el producto con la transpuesta de la matriz inversa.

Por lo tanto, el vector:

$$\underline{n}^k = ((\mathbf{a}^{-1})^T)^k{}_i n^i$$

es normal a la superficie transformada en el punto transformado.

La nueva normal a la superficie se obtiene transformando la vieja mediante la transpuesta de la inversa de la matriz de transformación.

Espacio proyectivo y transformaciones proyectivas

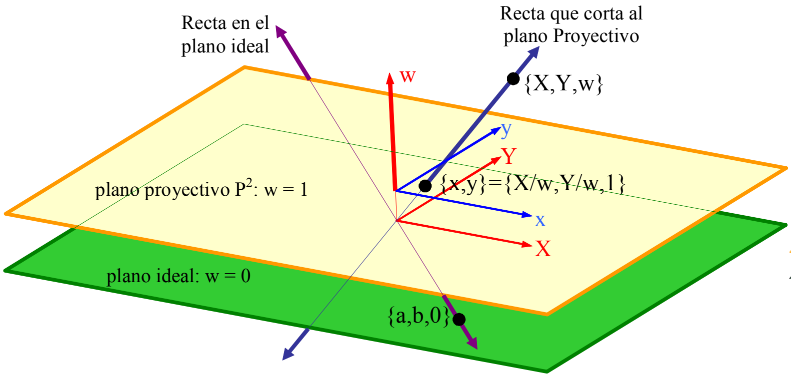
En R^3, una recta por el origen, queda definida por un punto cualquiera: es la recta que pasa por el origen y ese punto. Cualquier punto, excepto el origen, define una recta por el origen. **Armamos un nuevo espacio cuyos elementos son las rectas por el origen, este es el espacio proyectivo P^2**.

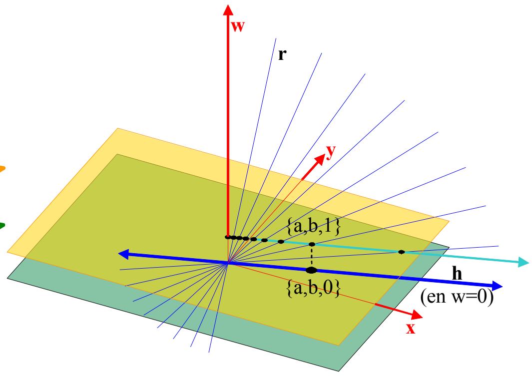
Usaremos coordenadas {X,Y,w} para las rectas, en breve quedará claro por qué.

Cualquier terna {X,Y,w} representa una recta por el origen; excepto, claro {0,0,0}. Ahora, {X,Y,w} y {αX,αY,αw}, con α ≠0, representan la misma recta.

Para identificar una recta cualquiera (asignarle coordenadas) mediante un único punto, la cortamos con el plano w=1. Cada punto de ese plano representa una recta diferente, la que pasa por ese punto y el origen. Pero a ese plano le faltan puntos para representar las rectas que están en el plano w=0, éstas no cortan al plano w=1 en ningún punto. Esas rectas quedan determinadas mediante alguno de sus puntos, con w=0. Las rectas del plano w=0 se suelen llamar “puntos ideales” o “puntos en el infinito” porque la recta “corta” al plano w=1 en el infinito.

La figura siguiente quizás aclare un poco más. En la figura izquierda se representan los tres ejes coordenados de R^3, el plano ideal con w=0 y el plano proyectivo, identificado con w=1. Además hay una recta que pasa por el origen y un punto en R^3 de coordenadas {X,Y,w} y corta al plano en el punto de coordenadas {X/w,Y/w,1} según R^3 o {x,y} en el sistema de referencia del plano proyectivo.





La otra recta, la complicada, está en el plano w=0, pasa por el punto {a,b,0}, llamémosla recta **h**. Para entender que punto se le asigna en el plano proyectivo, analizaremos (en la figura de la derecha) el plano vertical que forma una recta **h** y el eje vertical **w**. Cualquier recta **r** ≠ **h** de ese plano corta al plano w=1 en alguno de los puntos marcados. Se puede ver que a medida que la recta **r** se va “horizontalizando”, es decir: alejándose de **w** y acercándose a **h**, el punto del plano proyectivo se va alejando del origen. A la recta **h** le corresponde el punto límite (ideal o en el infinito) de la secuencia de puntos en el plano.

El punto {a,b,1} esta justo por encima del {a,b,0}. La sucesión de puntos marcados en el plano proyectivo puede definirse mediante {γa,γb,1}. Cuando γ crece, la recta que representa se va horizontalizando hasta que “en el infinito” coincide con la recta **h**. Cualquier punto {αa,αb,0}, con α≠0, sirve para representar la recta horizontal; lo importante es la dirección. Incluso podría hacerse α negativo y decrecer hasta -∞, de donde se ve la equivalencia de los dos puntos ideales opuestos.

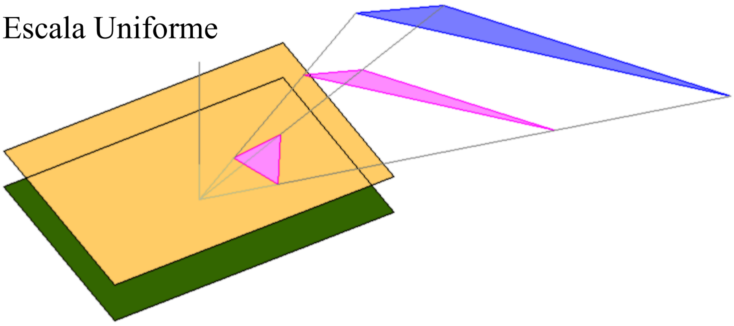
Podríamos decir que con w≠0 tenemos puntos (finitos), con w=0 puntos en el infinito o vectores. Para evidenciar las equivalencias usaremos {wx,wy,w} para representar puntos con w≠0.

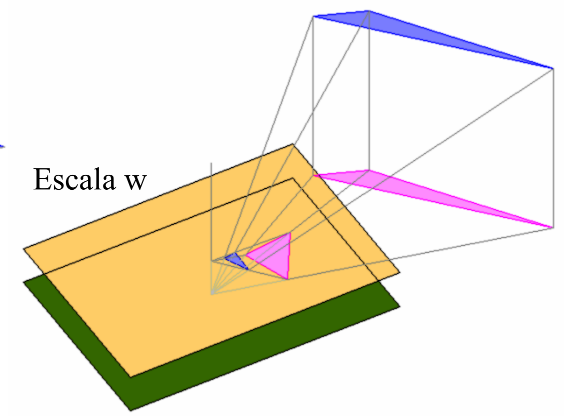
Resumiendo:

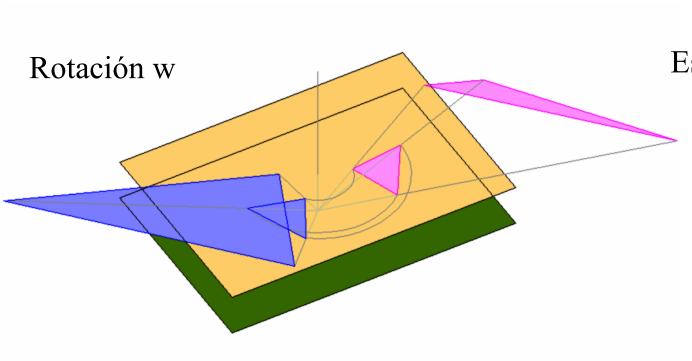
1) Tenemos un espacio vectorial lineal (R^3) cuyas rectas por el origen son a su vez los “puntos” de un nuevo espacio,
2) que llamamos plano proyectivo P^2 e identificamos con el plano w=1 de R^3, donde ubicamos los puntos (como verdaderos puntos).
3) Los puntos “en el infinito” o ideales, que también son puntos de P^2, representan rectas en el plano ideal (w=0).
4) En una representación tridimensional, un punto tiene coordenadas {X,Y,w}, que se denominan coordenadas homogéneas del punto estándar 2D {x=X/w, y=Y/w} o del vector estándar 2D {X,Y} en caso de que w sea nulo.
    a) Si w≠0, por el punto pasa una recta que corta al plano w=1 en el “punto” de coordenadas {x,y,1}.
    b) Si w=0, representa una recta horizontal y se corresponde en P^2 con un punto ideal, en el infinito, definido por un “vector” que indica la dirección.

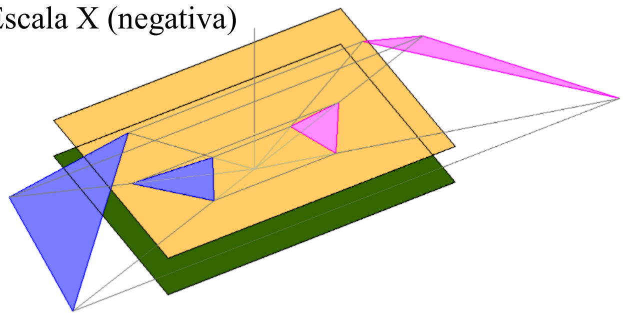
El efecto de una transformación lineal en R^3 sobre los puntos de P^2 se denomina transformación proyectiva. Algunos casos particulares se reducen a las transformaciones conocidas:

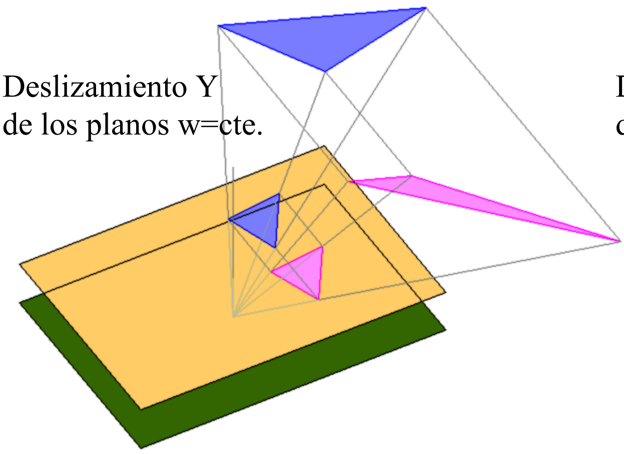
Lineal en R^3	**Proyectiva en P^2**
Escala uniforme:	Identidad (los puntos se mueven en las mismas rectas por el origen)
Escala en w:	Escala uniforme (cuanto mas se aleja en w mas chico “se ve” en P^2)
Escalas en X e Y:	Escalas en x e y
Shear X,Y (horizontal):	Traslación
Shear w (vertical):	Shear
Rotación con eje w:	Rotación
Otras:	Difícil de ver… veremos algunas

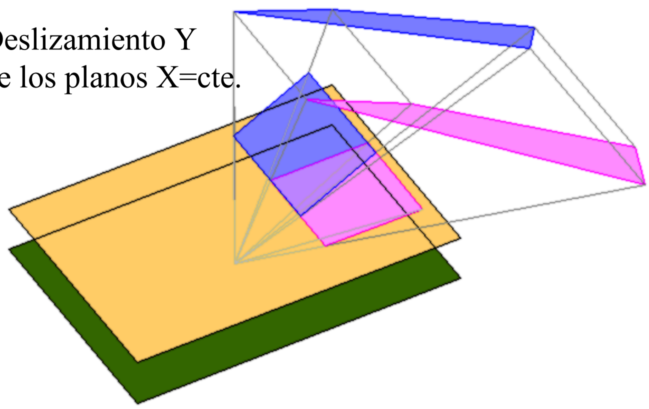

Escala Uniforme


Escala w


Rotación w

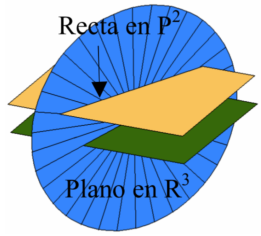

Escala X (negativa)


Deslizamiento Y
de los planos w=cte.


Deslizamiento Y
de los planos X=cte.

En el espacio P^2, los casos simples son el escalado, el deslizamiento, la rotación y la traslación. Son las transformaciones afines, que ahora pueden ser representadas mediante una transformación lineal en un espacio de una dimensión más y por lo tanto pueden representarse mediante matrices.

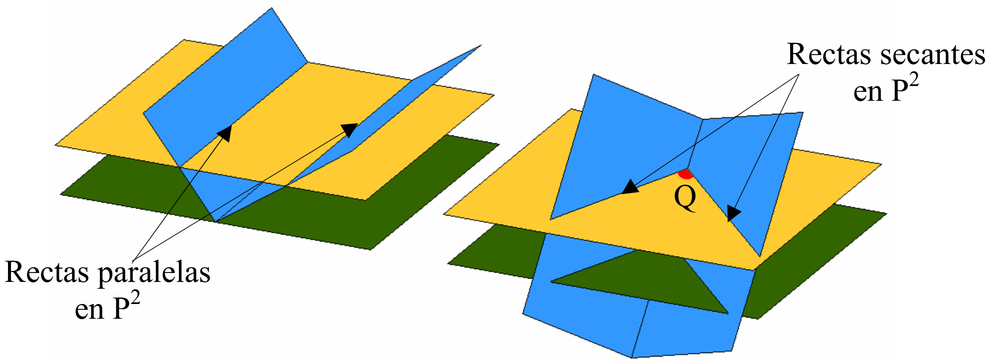
Las transformaciones lineales en P^2 mantienen vertical el eje w, es decir que $\underline{\mathbf{e}}_w = \alpha \mathbf{e}_w$ ($1/\alpha$ es el factor de escala). Si agregamos las traslaciones que inclinan el eje w, pero solo deslizan los planos w=cte. sobre si mismos, tenemos las transformaciones afines. En las afinidades (transformaciones afines) el plano ideal (w=0) se mapea sobre si mismo, no se inclina. Pero, en general, en una transformación lineal cualquiera de R^3, el plano proyectivo se puede inclinar y eso hace que puntos que estaban en el infinito pasen a ser finitos (ej.: fotografía del horizonte) y viceversa.



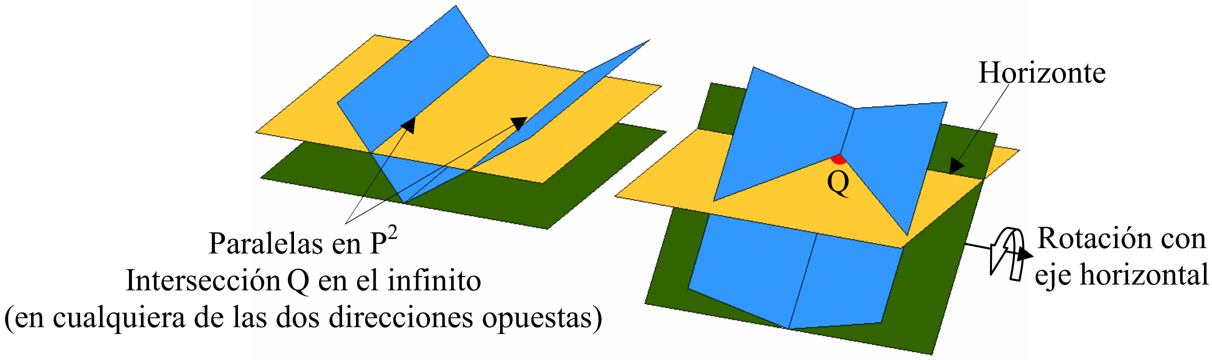
En una transformación proyectiva las rectas y planos por el origen de R^3, siguen siendo rectas y planos por el origen, esto es por ser lineal en R^3.

Un plano por el origen (en el espacio "grande") se ve como una recta en P^2. Por lo tanto la transformación proyectiva transforma rectas en rectas. El plano w=0 es la "recta en el infinito" para P^2, contiene la sucesión de puntos ideales o en el infinito, esta se transforma en una recta pero puede que no se quede en el infinito.

Dos rectas que se cortan en P^2 en el punto Q (figura de abajo, a la derecha) corresponden a dos planos que se cortan en la recta que pasa por el origen de R^3 y por el punto Q. Dos rectas paralelas de P^2 (a la izquierda) corresponden a dos planos por el origen de R^3, que se interceptan en una recta del plano w=0, paralela a ambas rectas de P^2. **En ambos casos se puede decir que la intersección existe; en el caso sencillo el punto Q tiene coordenadas finitas y en el otro es un punto ideal, en el infinito.**



En las transformaciones afines, el plano ideal queda en su sitio; las rectas paralelas siguen siendo paralelas (el infinito se mapea en el infinito) y las que se interceptan siguen interceptándose en el punto transformado. En una transformación proyectiva en general, si se modifica la posición del plano ideal, las cosas se complican y mucho. El plano ideal original ahora corta al proyectivo. A consecuencia de ello, algunos puntos ideales, que estaban en el infinito, ahora pasan a tener coordenadas finitas y forman una recta en P^2, la recta en el infinito se transforma en la intersección del plano girado y el proyectivo. No casualmente, llamaremos **horizonte** a esa recta.



En una transformación proyectiva, algunas rectas por el origen de R^3, pero que estaban en w=0, ahora cortan a P^2 en algún punto del horizonte; léase: algunas rectas paralelas ahora se cortan en el horizonte. (Un camino largo en una fotografía)

Del mismo modo, rectas en P^2 que antes se interceptaban puede que ahora resulten paralelas.

Para poder realizar los dibujos y las interpretaciones hemos identificado "nuestro espacio" con el plano P^2 inmerso en R^3. Si nos pasamos al espacio de modelos tridimensional tendremos que identificarlo con el hiperplano P^3 al que le corresponde w=1 en R^4. Las cosas se complican a la hora de visualizar cuatro dimensiones, solo analizaremos dos casos sencillos: las proyecciones central y ortogonal, que son suficientes para nuestras aplicaciones.

Proyecciones:

Las proyecciones son transformaciones no invertibles, de rango incompleto, aplastamientos.

Hasta ahora visualizábamos P^2 en R^3, pero al aplastar el plano proyectivo bidimensional sobre una recta no veremos nada interesante, los objetos planos se transforman en segmentos. No podemos hacer dibujos ilustrativos del espacio proyectivo que usaremos: P^3 inmerso en R^4, no podemos dibujar en cuatro dimensiones. De modo que se requiere un esfuerzo de imaginación y la ayuda del álgebra.

Las proyecciones transforman todos los puntos del espacio P^3 en puntos de un mismo plano, el plano de la imagen o plano de dibujo.

Proyección ortogonal:

La proyección ortogonal aplasta el espacio como un acordeón, los rayos que unen cada punto original con su imagen son todos paralelos entre si y perpendiculares al plano de dibujo. Proyectaremos sobre el plano x=0, pero esa proyección particular es fácilmente generalizable mediante transformaciones afines.

La proyección ortogonal sobre x=0 consiste simplemente en asignar al punto de coordenadas {x,y,z} el punto {0,y,z}. En coordenadas homogéneas será {x,y,z,w} → {0,y,z,w}, es decir que la matriz de transformación homogénea será como se muestra a la derecha.

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\y\\z\\w\end{bmatrix}$$

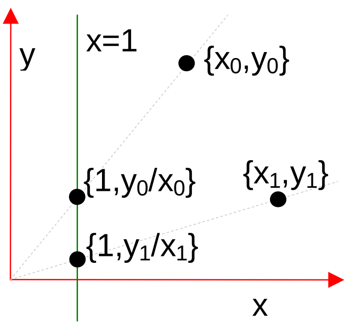
Las columnas de la matriz, como hemos visto antes, representan los ejes transformados por $\boldsymbol{L}(R^4)$, se puede ver que el nuevo versor $\underline{\mathbf{e}}_x$ simplemente se anuló, ahora tiene coordenadas {0,0,0,0}.

Perspectiva:

La proyección por perspectiva central consiste en interceptar, en el plano de la imagen, todos los rayos que van desde cada punto de la escena al ojo del observador. El vector desde el ojo y perpendicular al plano es la dirección de la visual y su longitud se denomina distancia focal.

El punto de vista es un punto finito de "nuestro espacio" P^3, supongamos el ojo en el origen ({0,0,0,1} en R^4) y el plano de dibujo en x=1. Un conjunto de transformaciones afines llevarán el caso particular planteado a cualquier otro; incluso para la proyección de sombras sobre un plano.

Dado que proyectamos en x=1, las coordenadas finales de un punto cualquiera {x,y,z} pasan a ser: {1,y/x,z/x}, al igual que las de cualquier otro punto de coordenadas {αx,αy,αz} que esta en la misma recta de proyección.



$$\begin{bmatrix}1/x&0&0\\0&1/x&0\\0&0&1/x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\y/x\\z/x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\x\end{bmatrix}$$

Esa transformación, cuya matriz de elementos variables (funciones de x) está a la izquierda, no es lineal en tres dimensiones. Pero en las coordenadas homogéneas de P^4, la misma transformación, mostrada a la derecha, convierte {x,y,z,w} en {x,y,z,x} y ahora resulta lineal.

En ambos tipos de transformación hay puntos del infinito que aparecen en el plano de la imagen. En proyección ortogonal, solo se ve el punto ideal {x,0,0,0} en dirección de la proyección, nada interesante. En perspectiva, en cambio, todos los planos que contienen al punto de vista se transforman en rectas por el origen, por lo tanto se ven sus puntos en el infinito. Con un poco más de esfuerzo intelectual se podrían entender el horizonte y los puntos de fuga y hasta plantear las ecuaciones que describen el dibujo en perspectiva.

Nestor Calvo
Computación Gráfica
FICH – UNL

Revisado: Martes, 25 de Octubre de 2011