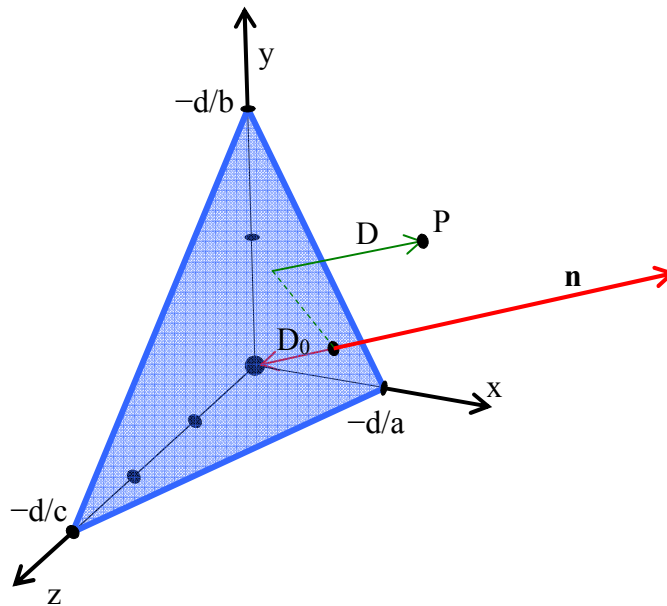


Planos en OpenGL



El plano en OpenGL se define mediante una función lineal de las tres coordenadas:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Haciendo cero cada par de coordenadas, se ve que las intersecciones con los ejes son las indicadas en la figura. Por ejemplo: cuando $y = z = 0$, se puede despejar $x = -d/a$.

El versor normal al plano es el vector unitario que se obtiene normalizando el producto vectorial de dos vectores del plano, que no sean paralelos, por ejemplo el producto de dos aristas:

$$\left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -d/b \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d/c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} d/a \\ -d/b \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} d/a \\ 0 \\ -d/c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d^2/bc \\ d^2/ca \\ d^2/ab \end{Bmatrix} = \frac{d^2}{abc} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}.$$

Se puede descartar el factor de escala d^2/abc para obtener, normalizando:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}.$$

Para calcular la distancia de un punto $P\{x,y,z\}$ al plano, se calcula la componente perpendicular al plano de un vector formado entre un punto del plano y el punto P :

$$D = (P - P_{\text{plano}}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \left(\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Esa distancia tiene signo que indica si el punto está del lado de la normal u opuesto.

OpenGL utiliza esa ecuación del plano porque opera con vectores 4D; considera al punto como un vector de cuatro componentes: $P\{x,y,z,w\}$ (con $w = 1$) y al plano como un vector $\Pi\{a,b,c,d\}$.

La distancia es un producto escalar que se normaliza con la raíz, el módulo de la normal. Un punto está en el plano si el producto escalar da cero; no hace falta dividir. Tampoco se divide para saber de que lado del plano está un punto. OpenGL **nunca** divide por la raíz; si se quiere que el producto escalar sea una real distancia, hay que normalizar la ecuación del plano haciendo $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Puede verse que d indica la distancia del origen $O\{0,0,0\}$ al plano:

$$D_0 = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$