Computación Gráfica

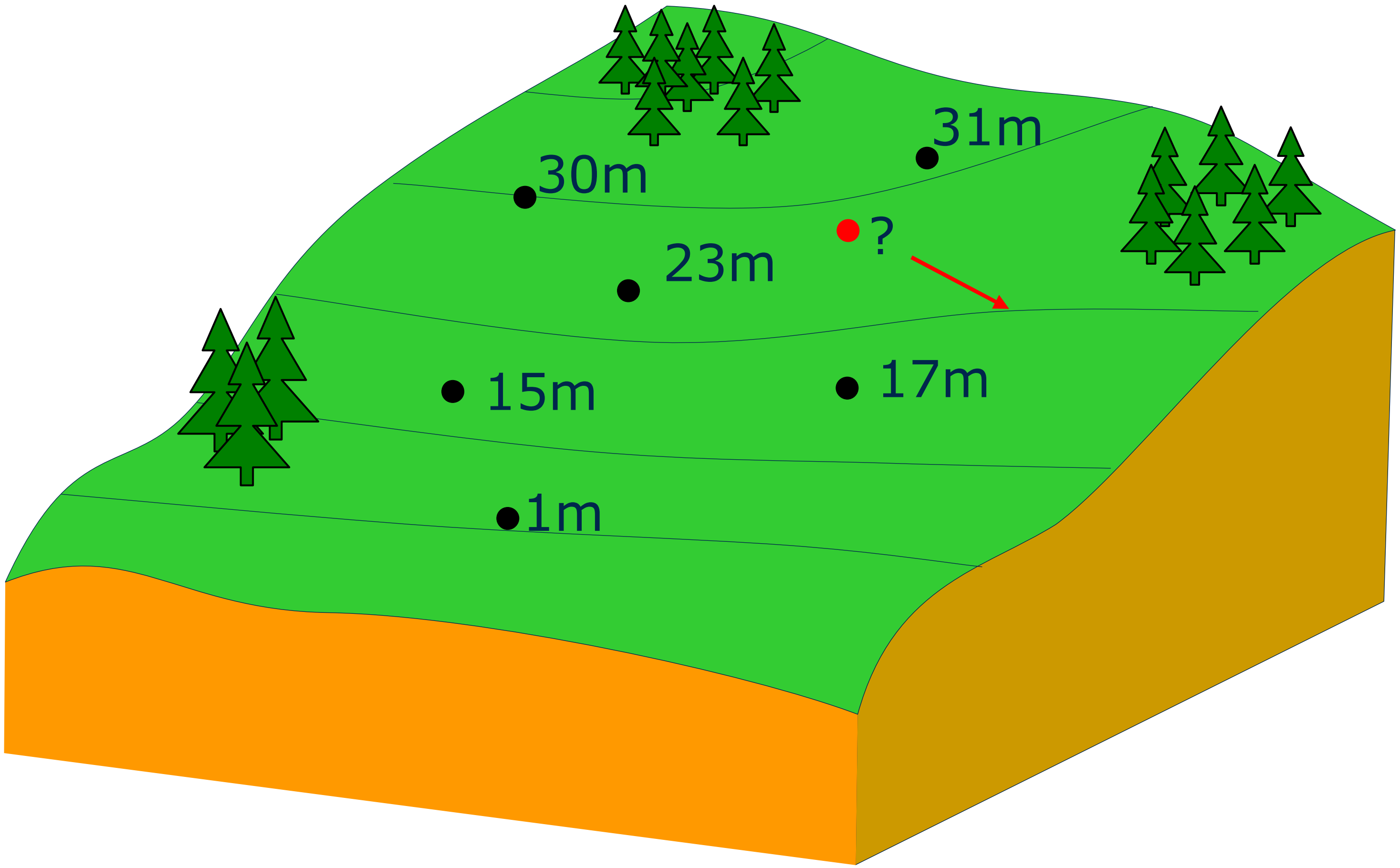
Interpolación

Docentes:

Néstor Calvo
Walter Sotil
Pablo Novara

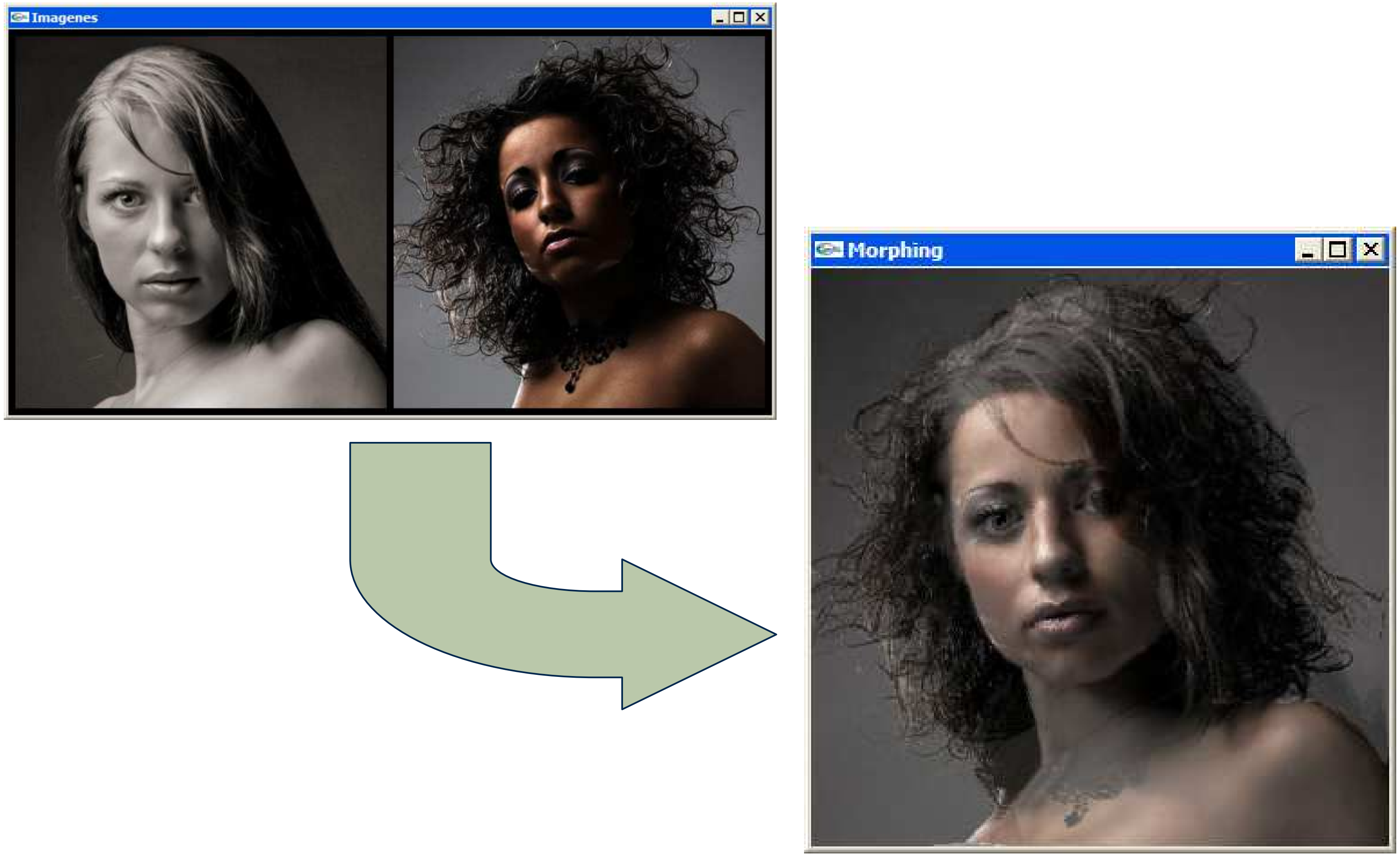
2011

Interpolación de Alturas

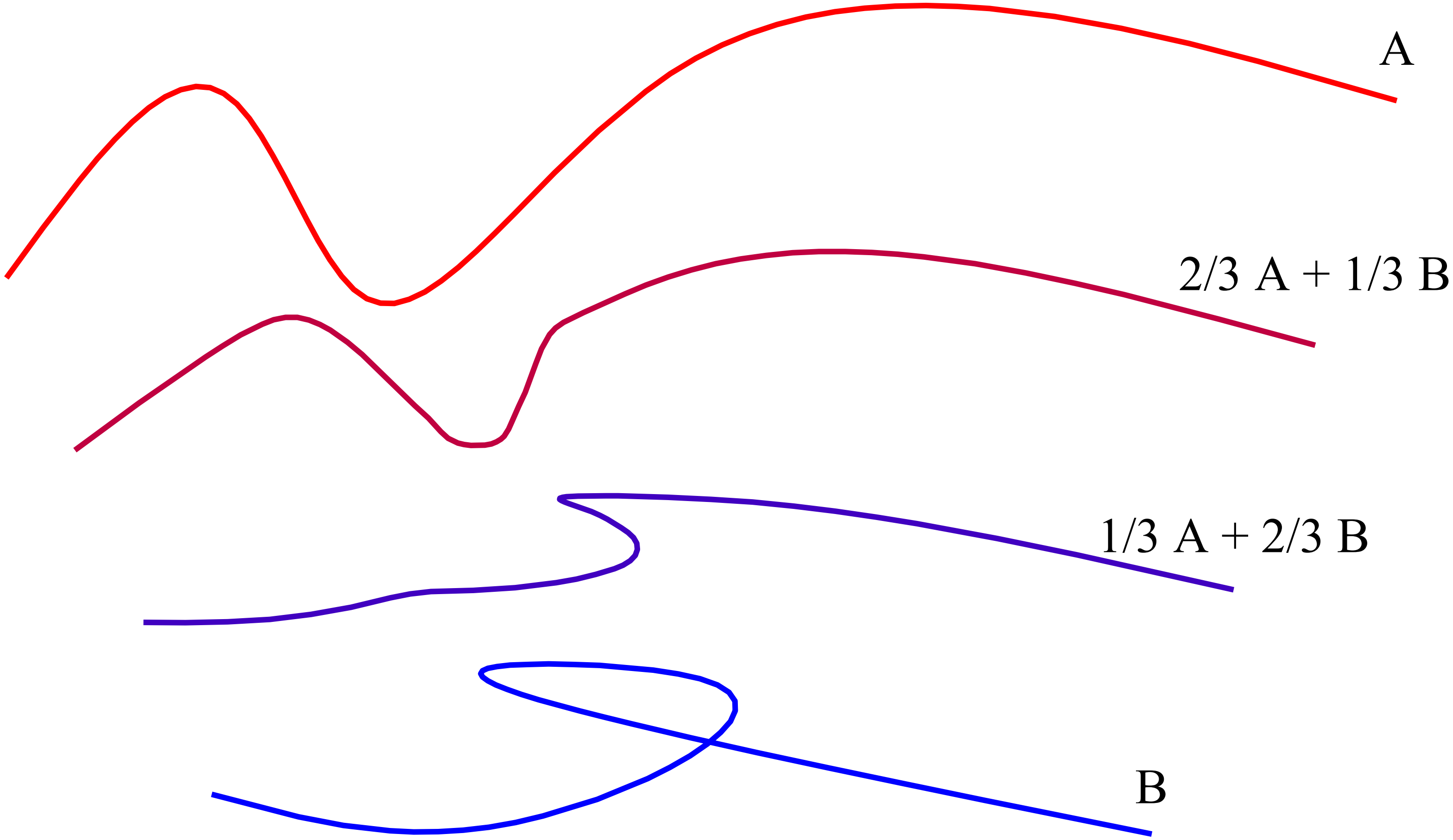


Interpolación de pixeles

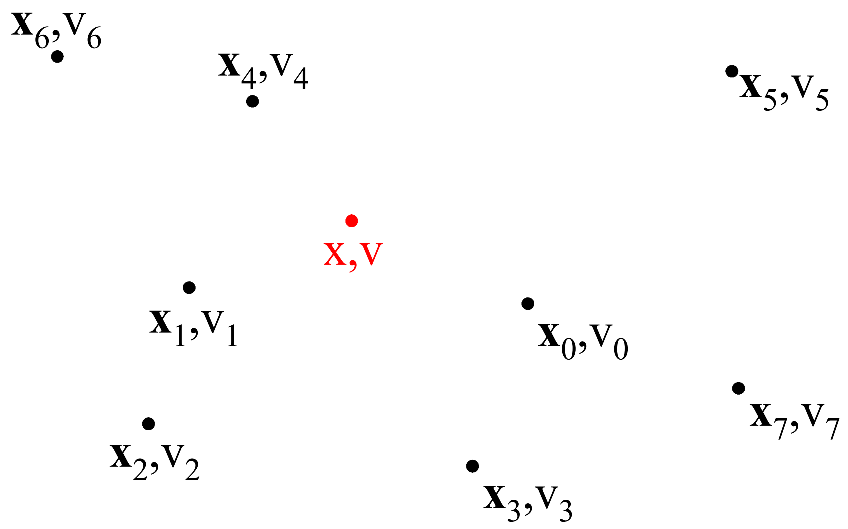
Interpolación de Imágenes



Interpolación de Curvas



Interpolación

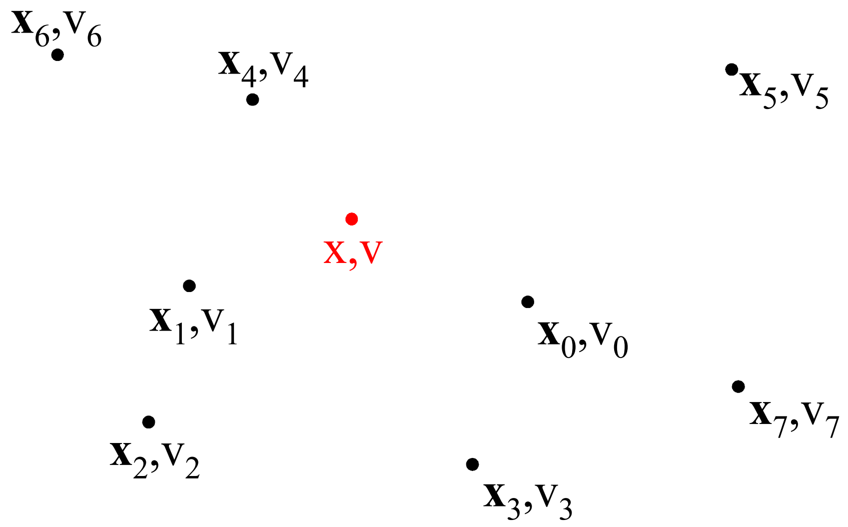


Conjunto finito de Nodos o puntos fijos, cada uno con un valor asociado (o varios).
Se pretende encontrar el valor en un punto cualquiera.

¿Qué puntos fijos se tienen en cuenta?
¿Cómo se calcula el valor incógnita en función de esos nodos?

Método de Interpolación

Promedio Ponderado



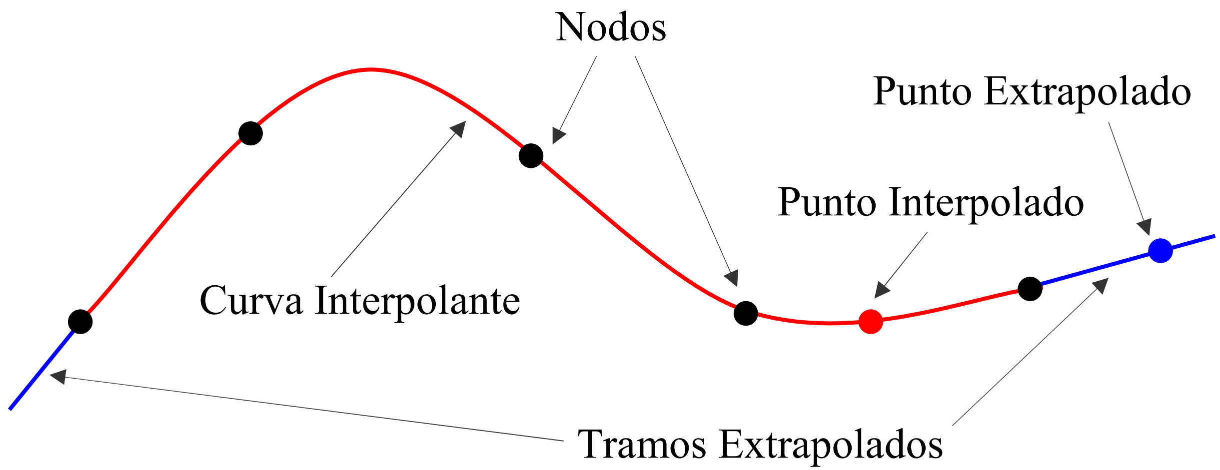
Para valores reales:

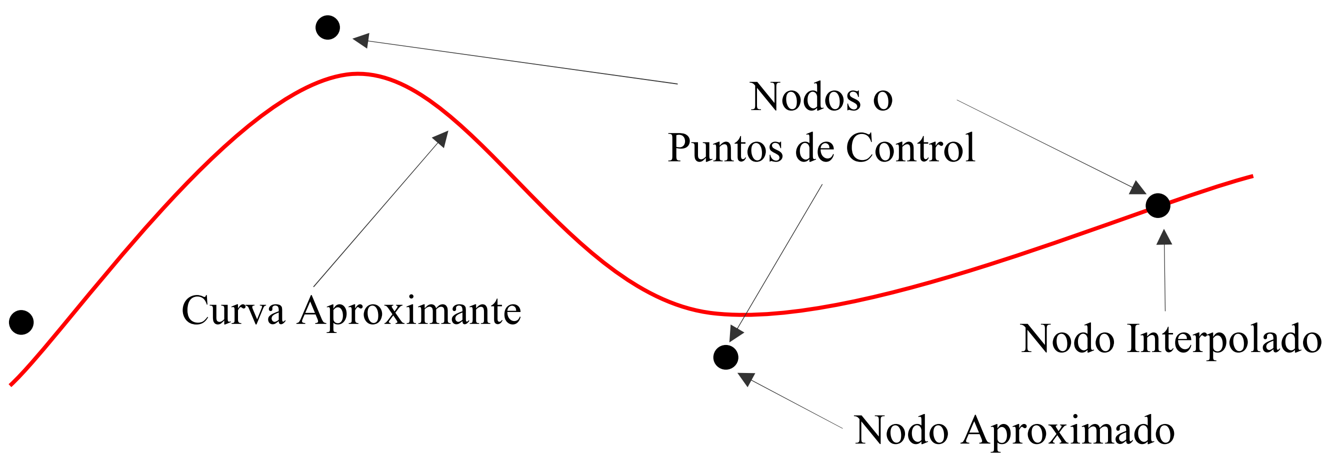
$$v(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\, v_i = \sum_i \alpha^i(\mathbf{x})\, v_i \qquad \left(\sum_i \alpha^i = 1\right)$$

Métodos Locales

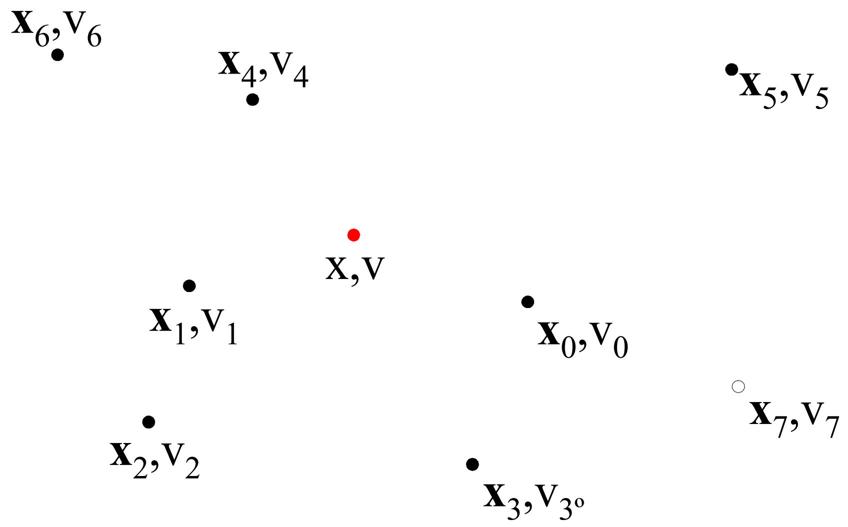
Normalmente $\alpha^i \sim 1/|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|$; muy lejanos $\Rightarrow = 0$

Interpolación / Extrapolación / Aproximación





Interpolación Afín



Interpolación Afín de **x**:

$$\mathbf{x} = \sum \alpha^i \, \mathbf{x}_i \qquad \sum \alpha^i = 1$$

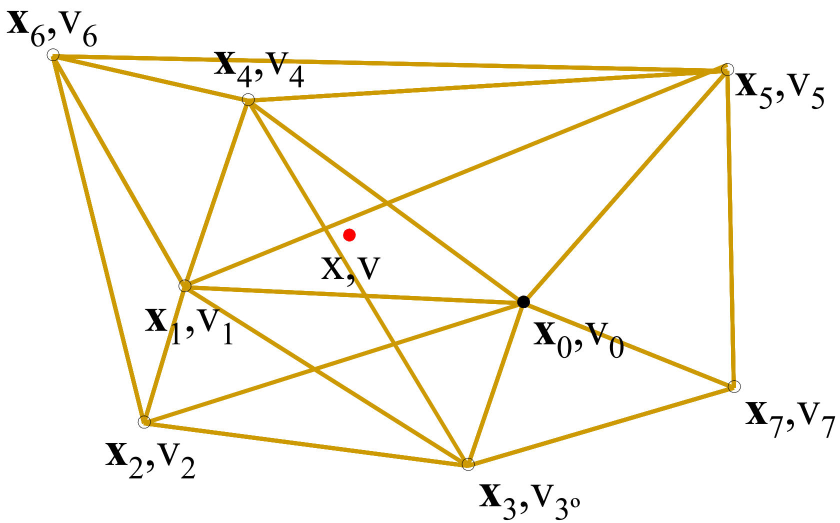
Se calculan (o asignan) los α^i para **x**, y con ellos se calcula el valor:

$$v(\mathbf{x}) = \sum \alpha^i \, v_i$$

Los valores reciben el mismo tratamiento que las coordenadas.

Sigue habiendo tantos métodos como modos de asignar los α^i.

Triangulación



Interpolación Afín de $\mathbf{x}$ <u>en el triángulo que lo incluye</u>:

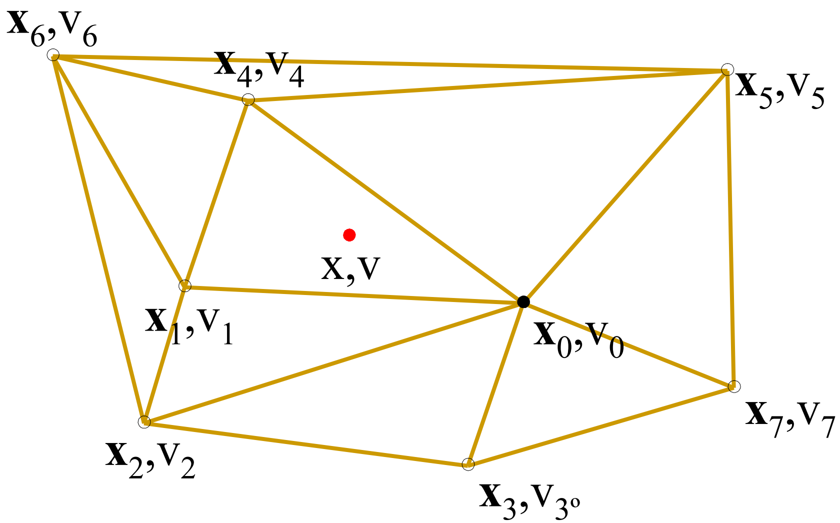
$$\mathbf{x} = \sum \alpha^i \, \mathbf{x}_i \qquad \sum \alpha^i = 1$$

Se calculan los α^i para $\mathbf{x}$, y con ellos se calcula el valor:

$$v(\mathbf{x}) = \sum \alpha^i \, v_i$$

Los valores reciben el mismo tratamiento que las coordenadas.
Ya sólo depende del modo de hacer la triangulación.

Triangulación



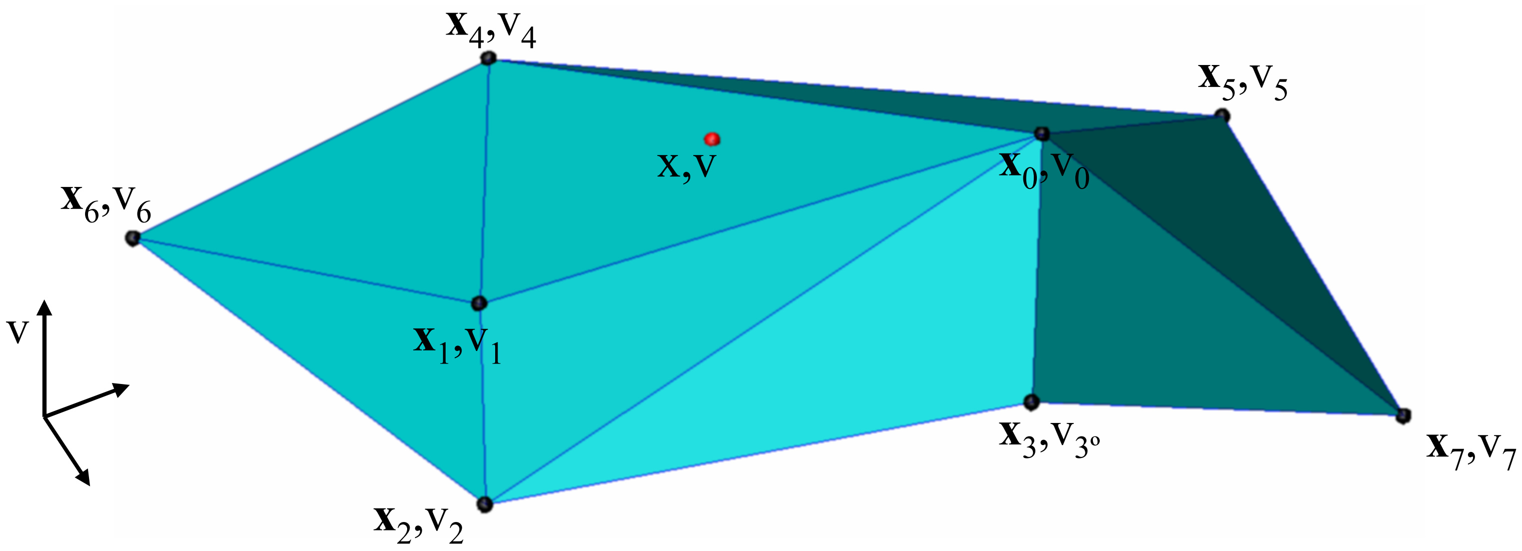
Interpolación afín de $\mathbf{x}$ <u>en el triángulo que lo incluye</u>:

$$\mathbf{x} = \sum \alpha^i \, \mathbf{x}_i = \quad \sum \alpha^i = 1$$

Sólo α^0, α^1 y α^4 son distintos de cero.

El valor en el punto depende sólo de v_0, v_1 y v_4

Interpolación Lineal (o Poli-Lineal)



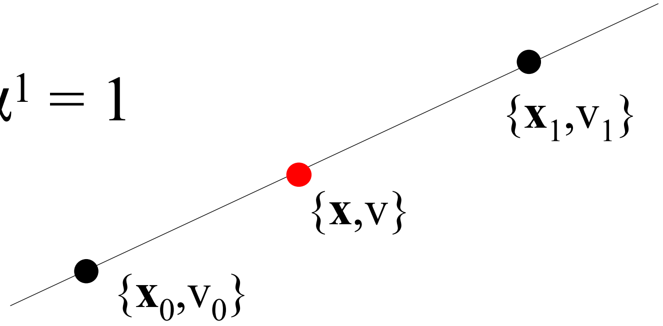
Interpolación afín de **x** <u>en el triángulo que lo incluye</u>:

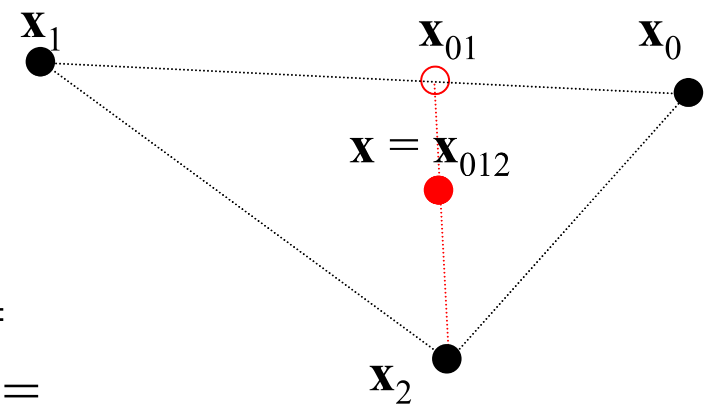
$$\mathbf{x} = \sum \alpha^i \mathbf{x}_i = \quad \sum \alpha^i = 1$$

Sólo α^0, α^1 y α^4 son distintos de cero.
El valor en el punto depende sólo de v_0, v_1 y v_4
Cada peso es uno en su nodo y cero en el resto.

Interpolación Afín

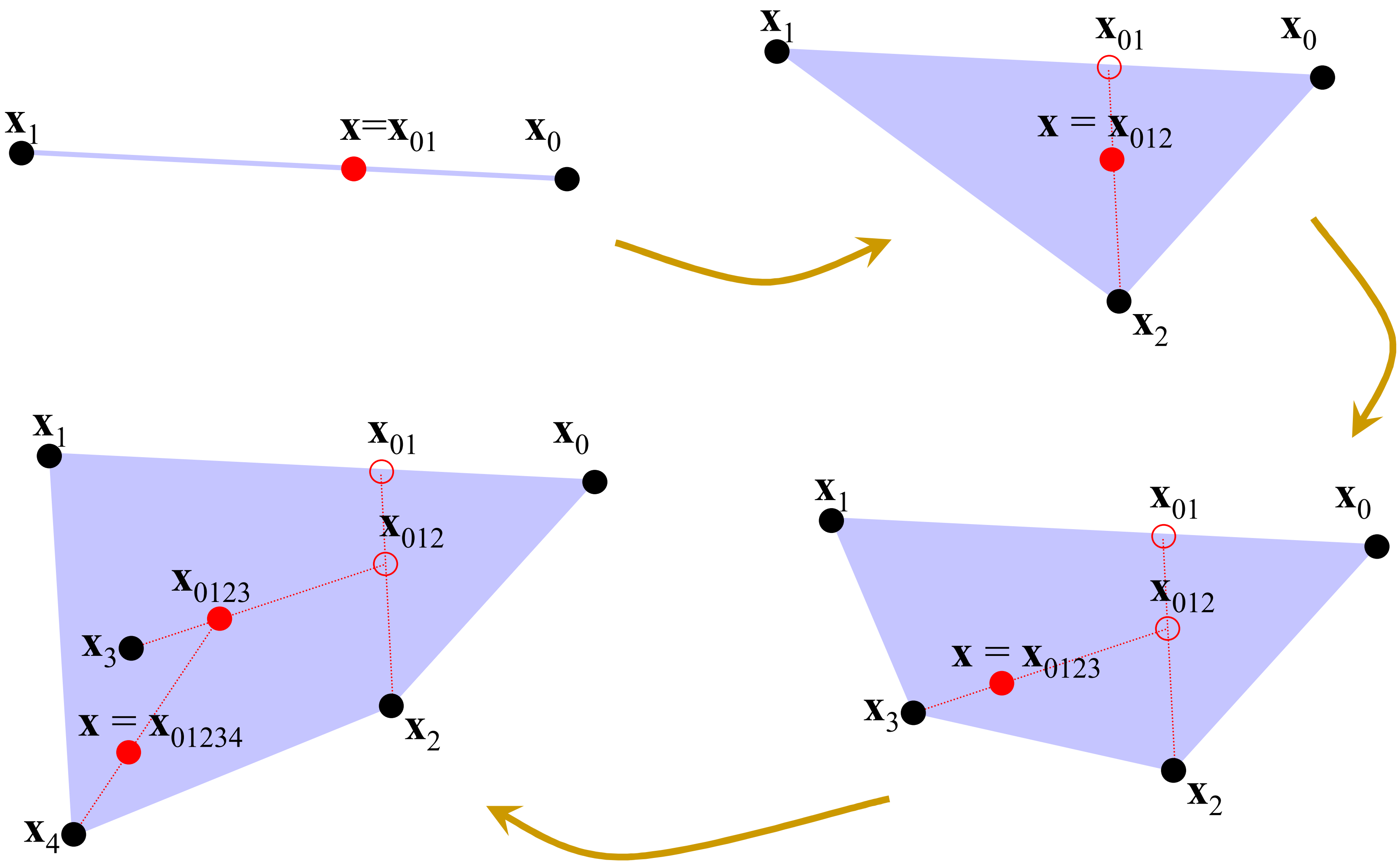
$$\mathbf{x} = \alpha^0\, \mathbf{x}_0 + \alpha^1\, \mathbf{x}_1, \quad \text{con } \alpha^0 + \alpha^1 = 1$$
$$v = \alpha^0\, v_0 + \alpha^1\, v_1$$





$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{012} &= \beta^{01}\, \mathbf{x}_{01} + \beta^2\, \mathbf{x}_2 \\
&= \beta^{01}(\alpha^0\mathbf{x}_0 + \alpha^1\mathbf{x}_1) + \beta^2\mathbf{x}_2 = \\
&= \beta^{01}\alpha^0\mathbf{x}_0 + \beta^{01}\alpha^1\mathbf{x}_1 + \beta^2\mathbf{x}_2 = \\
&= \gamma^0\mathbf{x}_0 + \gamma^1\mathbf{x}_1 + \gamma^2\mathbf{x}_2
\end{aligned}$$
$$\gamma^0 + \gamma^1 + \gamma^2 = \beta^{01}\, \alpha^0 + \beta^{01}\, \alpha^1 + \beta^2 = \beta^{01}\, (\alpha^0 + \alpha^1) + \beta^2 = 1$$
$$v = \gamma^0\, v_0 + \gamma^1\, v_1 + \gamma^2\, v_2$$

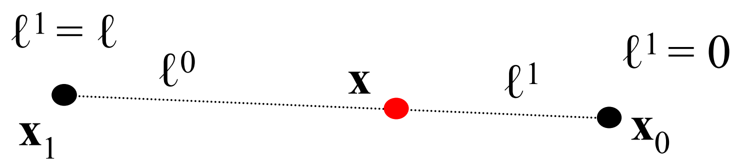
Envoltorio Convexo – Combinación Convexa



Coordenadas Baricéntricas

$$\ell^1 = \alpha^0\, \ell^1_{\ 0} + \alpha^1\, \ell^1_{\ 1}$$

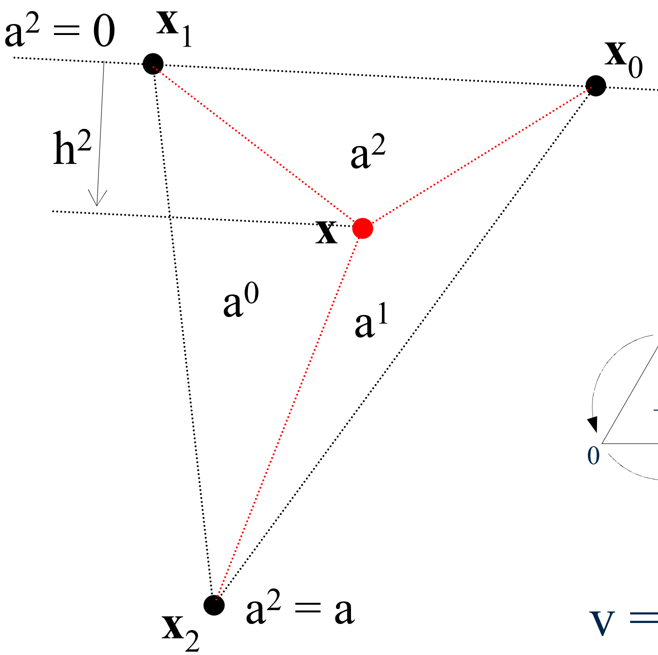
$$\ell^1 = \alpha^0\, 0 + \alpha^1\, \ell; \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 = \ell^1 / \ell$$



$$\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \qquad \ell = |\boldsymbol{\ell}|$$

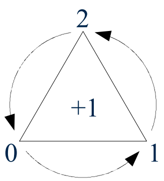
$$\ell^1 = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot \boldsymbol{\ell} / \ell \qquad \ell^0 = (\mathbf{x}_1-\mathbf{x})\cdot \boldsymbol{\ell} / \ell$$

$$\alpha^1 = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot \boldsymbol{\ell} / \ell^2 \qquad \alpha^0 = (\mathbf{x}_1-\mathbf{x})\cdot \boldsymbol{\ell} / \ell^2$$



$$a^2 = \alpha^0\, a^2_{\ 0} + \alpha^1\, a^2_{\ 1} + \alpha^2\, a^2_{\ 2}$$

$$a^2 = \alpha^0\, 0 + \alpha^1\, 0 + \alpha^2\, a \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = a^2/a$$



$$\mathbf{a} = (\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{a}^i = (\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}) \times (\mathbf{x}_{i+2}-\mathbf{x}) \qquad (i \,\%\, 3)$$

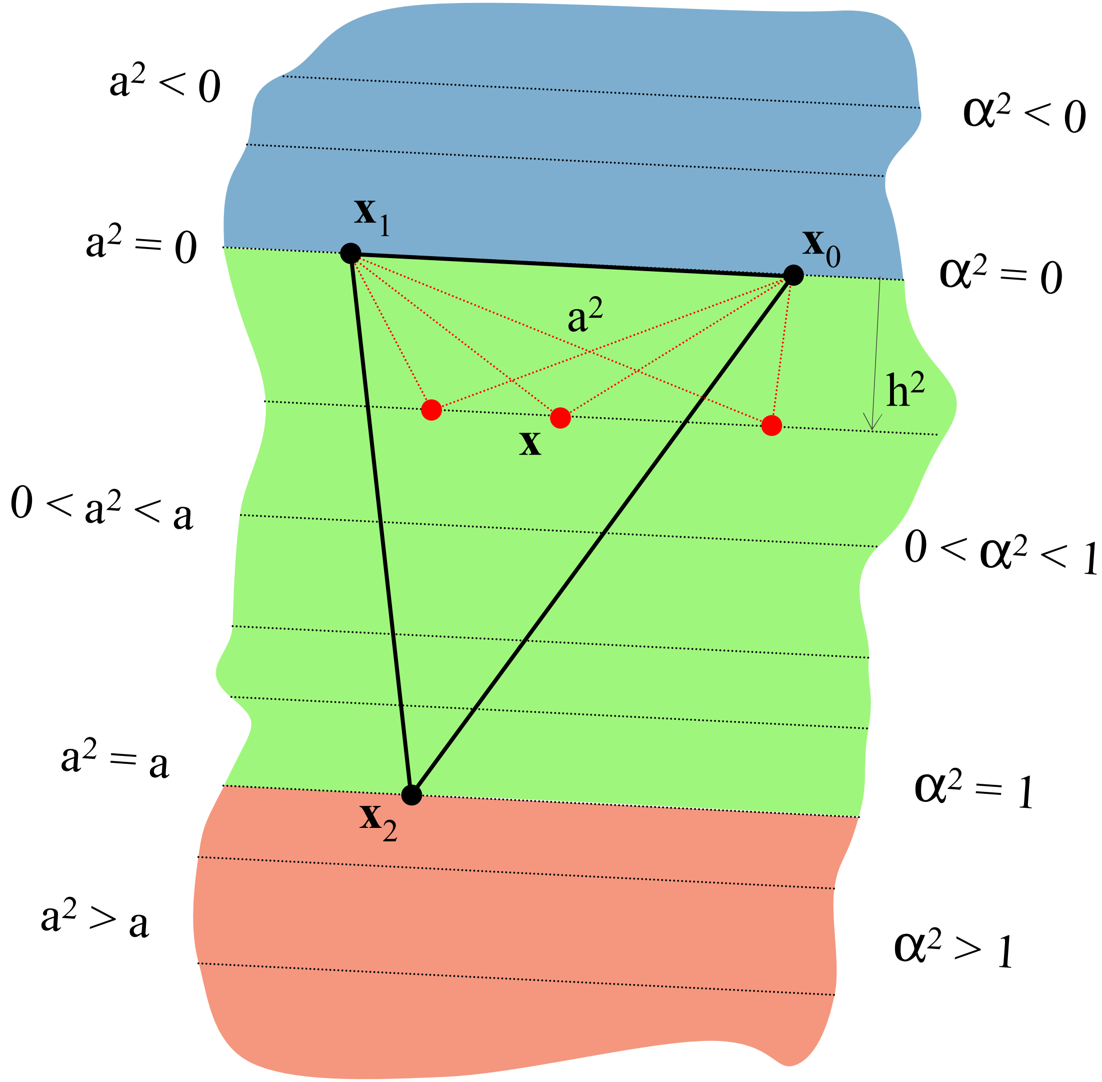
$$\alpha^i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a} / \mathbf{a}^2$$

$$v = ((\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_0)$$

$$\alpha^i = ((\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}) \times (\mathbf{x}_{i+2}-\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{x}_{i+3}-\mathbf{x}) / v \qquad (i \,\%\, 4)$$

Líneas isoparamétricas

$\alpha^2 = a^2/a.$



Interpolación Hiperbólica

Interpolación en el espacio Proyectivo:

$\{\mathbf{x},w\} = \alpha^0 \{\mathbf{x}_0,w_0\} + \alpha^1 \{\mathbf{x}_1,w_1\}$ $\qquad (\alpha^0 + \alpha^1 = 1)$

$\mathbf{y} = (\alpha^0 \mathbf{x}_0 + \alpha^1 \mathbf{x}_1) / (\alpha^0 w_0 + \alpha^1 w_1)$

$= (\alpha^0 w_0 \mathbf{x}_0 / w_0 + \alpha^1 w_1 \mathbf{x}_1 / w_1) / (\alpha^0 w_0 + \alpha^1 w_1)$

$= \beta^0 \mathbf{y}_0 + \beta^1 \mathbf{y}_1$ $\qquad (\beta^i = \alpha^i w_i / \sum \alpha^j w_j = \alpha^i w_i / w) \qquad (\beta^0 + \beta^1 = 1)$

Haciendo cocientes:

$\alpha^i w_i / \beta^i = w$ (constante) $\qquad$ (sin suma en i)

A la inversa, se quiere averiguar el punto correspondiente a pesos "proyectados" β:

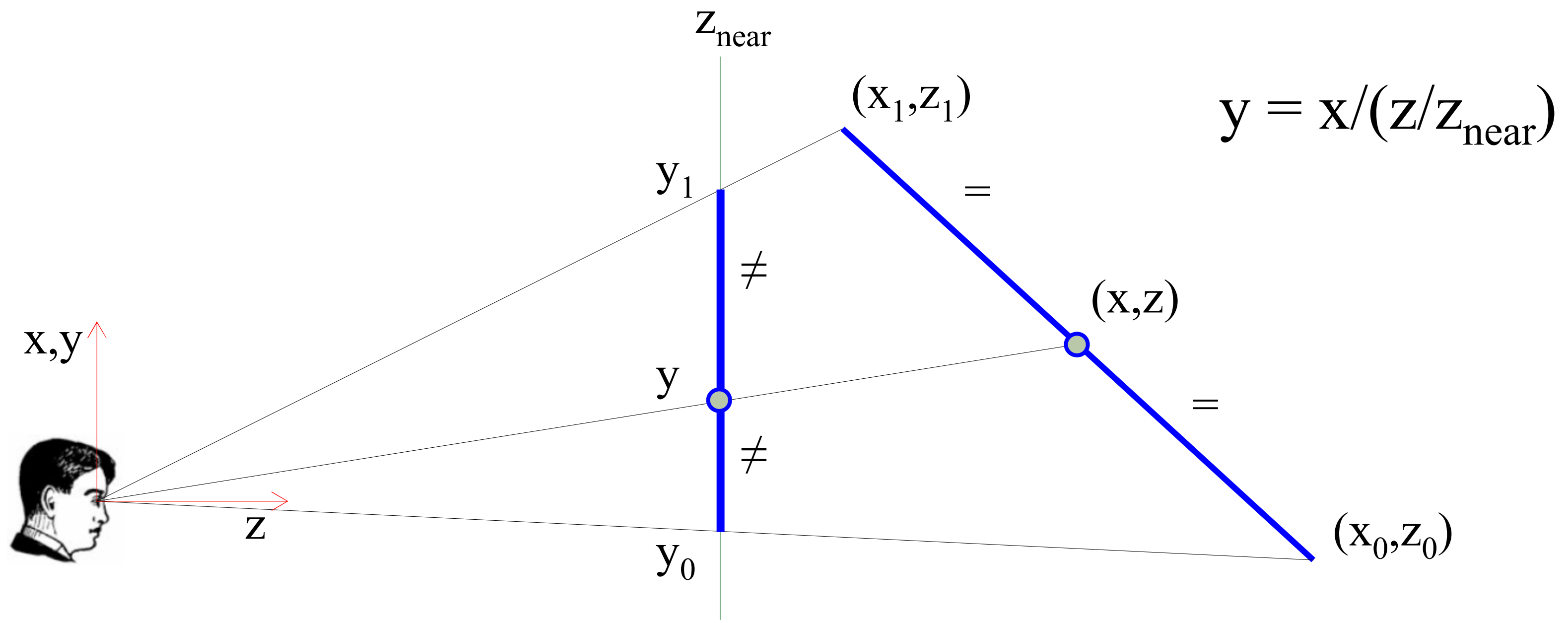
$1/w = \beta^0/w_0 + \beta^1/w_1$

$\alpha^0 = w\, \beta^0/w_0;\ \ \alpha^1 = w\, \beta^1/w_1;$

En las proyecciones, el papel de w/1 lo cumple la coordenada visual z/z_{near}

Pero como son todos cocientes $\Rightarrow$ se utiliza diréctamente z.

Corrección Perspectiva



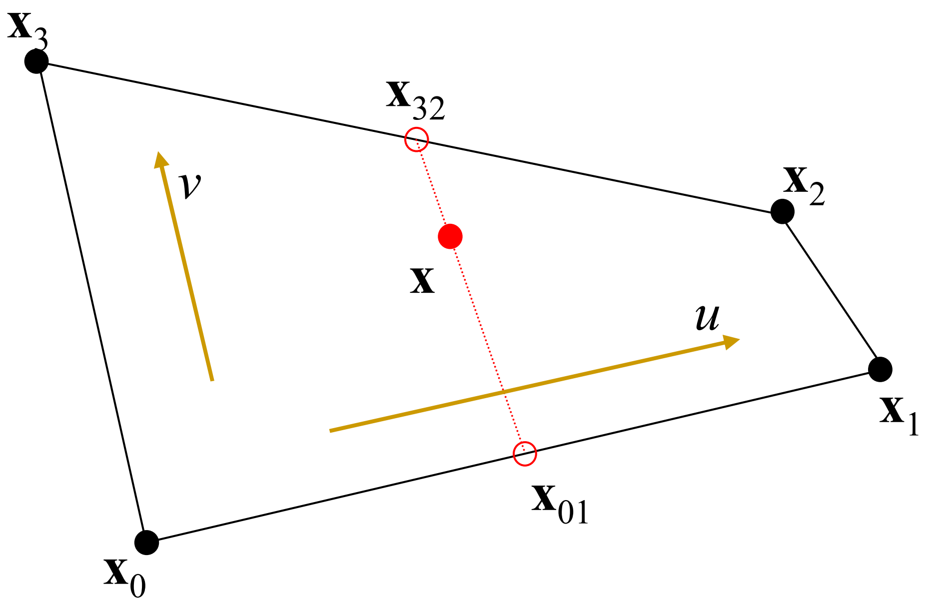
Ej.: Proyección del punto medio:

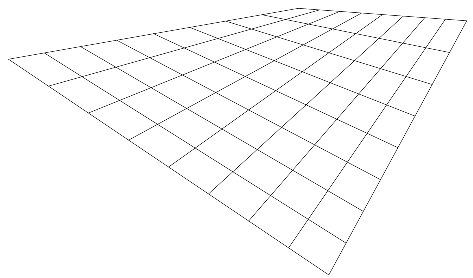
$$\beta^1=(z_1/2)/[(z_0+z_1)/2]=z_1/(z_0+z_1) \Rightarrow \mathbf{y}=(z_0\mathbf{y}_0+z_1\mathbf{y}_1)/(z_0+z_1)$$

Ej.: Color del pixel o textura correspondiente a $y=(1-\beta^1)y_0+\beta^1 y_1$:

$$\alpha^1=(\beta^1/z_1)/[(1-\beta^1)/z_0+\beta^1/z_1]; \;\; c=(1-\alpha^1)c_0+\alpha^1 c_1; \;\; t=(1-\alpha^1)t_0+\alpha^1 t_1$$

Interpolación Bilineal



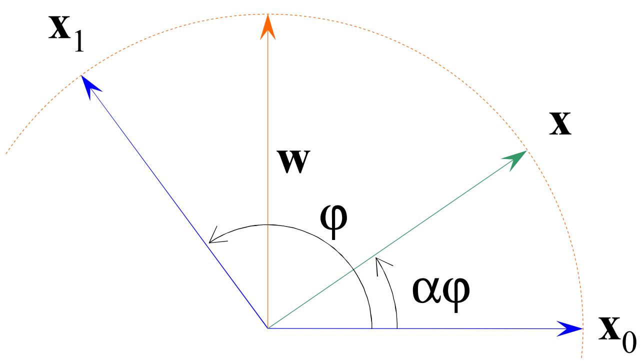


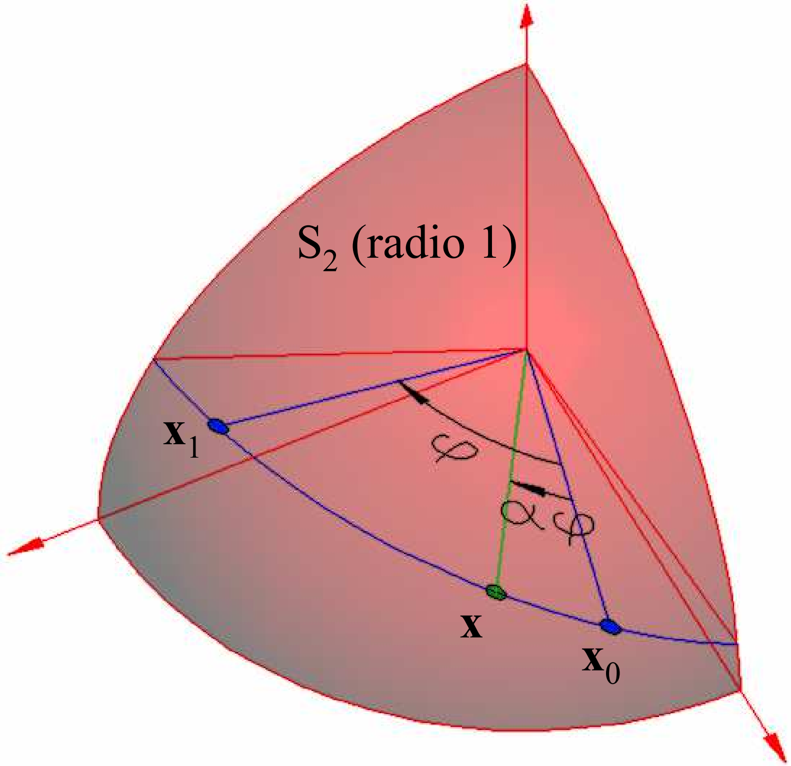
$$x_{01} = (1\text{-}u)\, x_0 + u\, x_{1;}\;\; x_{32} = (1\text{-}u)\, x_3 + u\, x_2$$

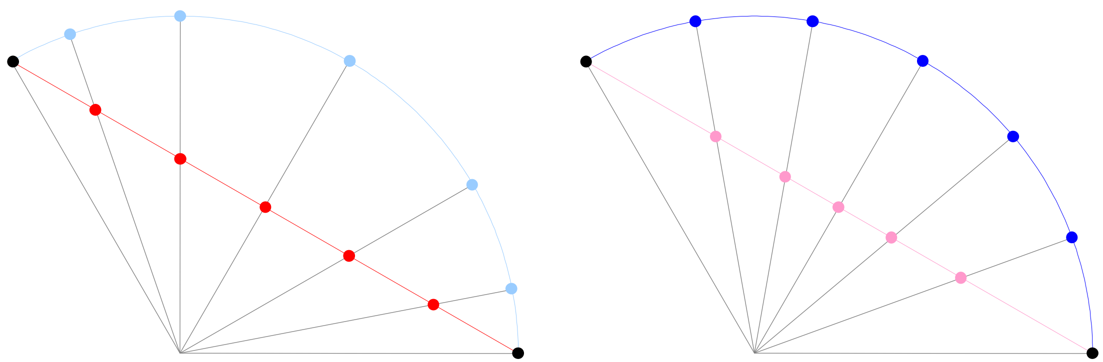
$$x = (1\text{-}v)\, x_{01} + v\, x_{32} =$$

$$= (1\text{-}v)\,(1\text{-}u)\, x_0 + (1\text{-}v)\, u\, x_1 + v\, u\, x_2 + v\,(1\text{-}u)\, x_3$$

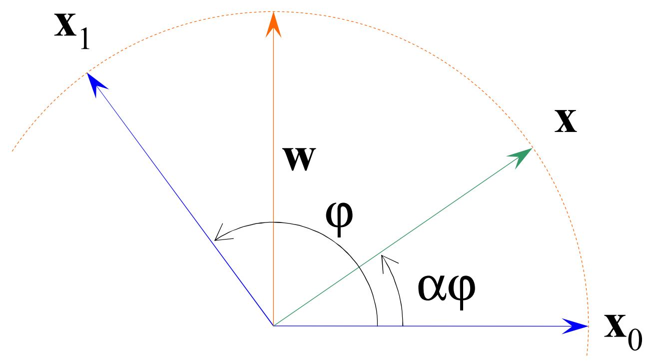
Interpolación esférica lineal o *Slerp*







Interpolación esférica lineal o *Slerp*



$$\varphi = \mathrm{acos}(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1)$$

$$\mathbf{x} = \cos(\alpha\varphi)\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\alpha\varphi)\, \mathbf{w}$$
$$\mathbf{x}_1 = \cos(\varphi)\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\varphi)\, \mathbf{w}$$

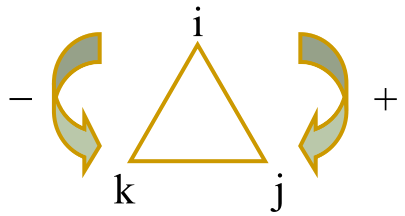
$$\mathbf{x} = \cos(\alpha\varphi)\, \mathbf{x}_0 + (\mathrm{sen}(\alpha\varphi)/\mathrm{sen}(\varphi))\, (\mathbf{x}_1 - \cos(\varphi)\, \mathbf{x}_0)$$
$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(\varphi)\, \mathbf{x} &= \cos(\alpha\varphi)\, \mathrm{sen}(\varphi)\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\alpha\varphi)\, (\mathbf{x}_1 - \cos(\varphi)\, \mathbf{x}_0) \\ &= [\cos(\alpha\varphi)\, \mathrm{sen}(\varphi) - \mathrm{sen}(\alpha\varphi)\, \cos(\varphi)]\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\alpha\varphi)\, \mathbf{x}_1 \\ &= \mathrm{sen}(\varphi - \alpha\varphi)\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\alpha\varphi)\, \mathbf{x}_1 \\ &= \mathrm{sen}[(1 - \alpha)\varphi]\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\alpha\varphi)\, \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \mathrm{sen}[(1 - \alpha)\varphi]/\mathrm{sen}(\varphi)\, \mathbf{x}_0 + \mathrm{sen}(\alpha\varphi)/\mathrm{sen}(\varphi)\, \mathbf{x}_1$$

Quaterniones

$q = ai+bj+ck+d$ Base: $\{i,j,k,1\}$ Componentes $\{a,b,c,d\}$

Producto distribuido (todos contra todos)



Productos de la base:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$ $ij = -ji = k;$ $jk = -kj = i;$ $ki = -ik = j$

Representación Escalar-Vector:

$q = \langle d,\mathbf{u}\rangle;$ $\mathbf{u} = \{a,b,c\}$

Vector o cuaternión puro: $\mathbf{u} = \langle 0,\mathbf{u}\rangle$

Escalar: $d = \langle d,\mathbf{0}\rangle$

Quaterniones

$q = ai+bj+ck+d$ Base: $\{i,j,k,1\}$ Componentes $\{a,b,c,d\}$

Producto distribuido (todos contra todos|)

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 = {} & a_1a_2\ ii + a_1b_2\ ij + a_1c_2\ ik + a_1d_2\ i1 + \\
& b_1a_2\ ji + b_1b_2\ jj + b_1c_2\ jk + b_1d_2\ j1 + \\
& c_1a_2\ ki + c_1b_2\ kj + c_1c_2\ kk + c_1d_2\ k1 + \\
& d_1a_2\ 1i + d_1b_2\ 1j + d_1c_2\ 1k + d_1d_2\ 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 = {} & -\ a_1a_2\ 1 + a_1b_2\ k - a_1c_2\ j + a_1d_2\ i \\
& -\ b_1a_2\ k - b_1b_2\ 1 + b_1c_2\ i + b_1d_2\ j \\
& +\ c_1a_2\ j - c_1b_2\ i - c_1c_2\ 1 + c_1d_2\ k \\
& +\ d_1a_2\ i + d_1b_2\ j + d_1c_2\ k + d_1d_2\ 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 = {} & \quad d_1d_2-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+ \\
& +\ d_1(a_2i+b_2j+c_2k) + d_2(a_1i+b_1j+c_1k)+ \\
& +\ i(b_1c_2-c_1b_2) - j(a_1c_2-c_1a_2) + k(a_1b_2-b_1a_2)
\end{aligned}
$$

$$q_1q_2 = <(d_1d_2-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2),(d_1\mathbf{u}_2+d_2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)>$$

Quaterniones

$q = ai+bj+ck+d$ Base: $\{i,j,k,1\}$ Componentes $\{a,b,c,d\}$

Producto distribuido (todos contra todos):

$$q_1q_2 = \langle(d_1d_2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2),(d_1\mathbf{u}_2 + d_2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)\rangle$$

$q_1q_2 \neq q_2q_1$ sólo porque: $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1$

Quaterniones

$$q = < d;\ \mathbf{u} >$$

Conjugado:

$q^* = < d;\ -\mathbf{u} >$ $\qquad$ $qq^* = q^*q = a^2+b^2+c^2+d^2 = d^2+\mathbf{u}^2$

Norma o Magnitud o Módulo:

$||q|| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{d^2 + \mathbf{u}^2}$

Inverso:

$q^{-1} = q^*/||q||$ $\qquad$ $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$

Normalización

$q_1 = q/||q||$ $\qquad$ $q_1^{-1} = q_1^*$

Rotaciones con Quaterniones

Expresión inicial:

$$\underline{\mathbf{v}} = q\,\mathbf{v}\,q^{-1} = q < 0, \mathbf{v} > q^{-1}$$

$$q^{-1} = (||q||q_1)^{-1} = ||q||^{-1}\, q_1^{-1} \quad \Rightarrow \quad (||q||q_1)\,\mathbf{v}\,(||q||q_1)^{-1} = q_1\,\mathbf{v}\,q_1^{-1}$$

Sigue con cuaterniones unitarios:

$$q = < \cos(\alpha);\, \mathbf{u}\, \mathrm{sen}(\alpha) > \quad (||\mathbf{u}||=1) \qquad ||q||^2 = \cos^2(\alpha) + \mathbf{u}^2\, \mathrm{sen}^2(\alpha) = 1$$

Rotaciones con Quaterniones

$q_1 q_2 = <(d_1 d_2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2),(d_1 \mathbf{u}_2 + d_2 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)>$

Expresión :

$$\underline{\mathbf{v}} = q\ \mathbf{v}\ q^{-1} = < \cos(\alpha); \mathbf{u} \operatorname{sen}(\alpha) > < 0, \mathbf{v} > < \cos(\alpha); -\mathbf{u} \operatorname{sen}(\alpha) >$$

Aplicado a un vector paralelo a **u**: **v// = γ u** :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{v}}// &= < \cos(\alpha); \mathbf{u} \operatorname{sen}(\alpha) > < 0; \gamma\, \mathbf{u} > < \cos(\alpha); -\mathbf{u} \operatorname{sen}(\alpha) > \\
&= < -\gamma \operatorname{sen}(\alpha); \gamma \cos(\alpha)\, \mathbf{u} > < \cos(\alpha); -\mathbf{u} \operatorname{sen}(\alpha) > \\
&= < [\gamma \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) - \gamma \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)]; \gamma\mathbf{u}\, [\cos2(\alpha) + \operatorname{sen}2(\alpha)] > \\
&= < 0; \gamma\mathbf{u} > \\
&= \mathbf{v}//
\end{aligned}$$

Un vector paralelo a **u** no cambia.

Rotaciones con Quaterniones

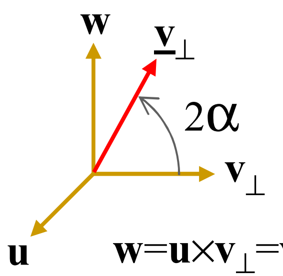
$$q_1q_2 = \langle (d_1d_2 - \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2),(d_1\mathbf{u}_2 + d_2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)\rangle$$

Expresión :

$$\underline{\mathbf{v}} = q\ \mathbf{v}\ q^{-1} = \langle \cos(\alpha);\ \mathbf{u}\ \mathrm{sen}(\alpha)\rangle \langle 0, \mathbf{v}\rangle \langle \cos(\alpha);\ -\mathbf{u}\ \mathrm{sen}(\alpha)\rangle$$

Aplicado a un vector perpendicular a $\mathbf{u}$: $\mathbf{v}_\perp\cdot\mathbf{u} = 0$ y usando $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp$:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{v}}_\perp &= \langle \cos(\alpha);\ \mathbf{u}\ \mathrm{sen}(\alpha)\rangle \langle 0;\ \mathbf{v}_\perp\rangle \langle \cos(\alpha);\ -\mathbf{u}\ \mathrm{sen}(\alpha)\rangle \\
&= \langle 0;\ \cos(\alpha)\ \mathbf{v}_\perp + \mathrm{sen}(\alpha)\ \mathbf{w}\rangle \langle \cos(\alpha);\ -\mathbf{u}\ \mathrm{sen}(\alpha)\rangle \\
&= \langle 0;\ \cos^2(\alpha)\ \mathbf{v}_\perp + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\ \mathbf{w} + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\ \mathbf{w} - \mathrm{sen}^2(\alpha)\ \mathbf{v}_\perp\rangle \\
&= \langle 0;\ \{[\cos^2(\alpha) - \mathrm{sen}^2(\alpha)]\ \mathbf{v}_\perp + 2\ \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\ \mathbf{w}\}\rangle \\
&= \langle 0;\ [\cos(2\alpha)\ \mathbf{v}_\perp + \mathrm{sen}(2\alpha)\ \mathbf{w}]\rangle
\end{aligned}$$



$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp=\mathbf{v}_\perp\times(-\mathbf{u})$ $\quad(|\mathbf{u}|=1;\ |\mathbf{v}|=|\mathbf{w}|)$ $\quad\mathbf{w}\times(-\mathbf{u})=(-\mathbf{v}_\perp)$

Un vector perpendicular a **u** gira 2α.

Rotaciones con Quaterniones

Transformación :

$$\underline{\mathbf{v}} = q\,\mathbf{v}\,q^{-1} = <\cos(\alpha);\ \mathbf{u}\,\mathrm{sen}(\alpha)> <0, \mathbf{v}> <\cos(\alpha);\ -\mathbf{u}\,\mathrm{sen}(\alpha)>$$

El resultado es un vector. Es una rotación de ángulo 2α alrededor de **u**.

$$q_1 q_2 q_2^{-1} q_1^{-1} = 1 \Rightarrow (q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1}$$

Combinación:

$$q_1\,(q_2\,\mathbf{v}\,q_2^{-1})\,q_1^{-1} = (q_1\,q_2)\,\mathbf{v}\,(q_1\,q_2)^{-1}$$

Interpolación: Slerp en S_3