Métodos Numéricos y Simulación. Parcial II. Tema t1a. [2004-dic-03]

Ej. 1.- Resolver la ecuación del calor 1D en una chapa delgada con un término de enfriamiento Newtoniano hacia las dos superficies exteriores, según la siguiente ecuación modelo:

$$\kappa t \Delta\phi - 2h\phi = -Q \tag{1}$$

donde κ es la conductividad del medio, t el espesor de la chapa, h el coeficiente pelicular de intercambio con el exterior y Q una fuente de calor interna.

El dominio es el intervalo $[0, L]$ con condiciones de contorno $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Usar el método de residuos ponderados Galerkin con las funciones base:

$$N_j = \sin(\pi j x/L), \quad j = 1, 2, 3, ...\infty \tag{2}$$

Consignas:

i) Plantear la formulación variacional necesaria para llegar a un sistema lineal $Ax = b$

ii) Encontrar la expresión genérica para A_{ij} y b_j.

iii) Resolver el problema tomando los 3 primeros términos de la serie para los siguientes valores: $L = 10$ m, $\kappa = 10\text{W}/^\circ\text{Km}$, $Q = 200$ W/m^3, $t = 0.01$ m, $h = 3\times10^{-4}\text{W}/^\circ\text{Km}^2$.

Integrales que pueden ser de utilidad:

$$\begin{aligned} \int \sin px \, \sin qx \, \mathrm{d}x &= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}, \qquad (\text{debe ser } p \neq q) \\ \int \sin^2 ax \, \mathrm{d}x &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \end{aligned} \tag{3}$$