Curso HPC en MC. PETScgoo.gl/m6qbhV
TPL3. Trabajo Práctico de Laboratorio. [2018-07-31]

PASSWD PARA EL ZIP: C4VQ 26WR H458

Ejercicios

[Ej. 1] [waves] Se desea resolver el problema de la ecuación de las ondas 1D,

Explicación física:

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \beta u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in [0,L], t > 0 \\ & u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ & \text{+ condiciones iniciales en } u \text{ y } u_t \end{aligned} \tag{1}$$

donde c es la velocidad del sonido, β es un coeficiente de amortiguamiento.

La ecuación la resolvemos asumiento una evolución harmónica de frecuencia ω es decir $u(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\hat{u}(x)$ de manera que llegamos a la ec. de Helmholtz para las ondas en frecuencia,

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 + \mathrm{i}\,\beta\omega)\hat{u} = c^2\hat{u}_{xx} + \hat{f}(x), \quad x \in [0,L] \\ & u(0) = u(L) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

Es decir que sólo se resuelve en el espacio (x) y no en el tiempo. Pero la solución es un número complejo. Para evitar trabajar con números complejos, lo planteamos como dos campos $v = \mathrm{Re}\,\{\hat{u}\}$, $w = \mathrm{Im}\,\{\hat{u}\}$ y las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} -\omega^2 v - \beta\omega w &= c^2 v_{xx} + f'(x), \\ -\omega^2 w + \beta\omega v &= c^2 w_{xx} + f''(x), \\ v(0) = v(L) = 0&, w(0) = w(L) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

o sea que son dos ecuaciones de ondas en principio desacopladas, el acoplamiento viene por el termino disipataivo. f', f'' son las partes real e imaginaria de f. Discretizando con diferencias finitas de paso h tenemos para cada nodo interior

Ecuaciones discretas:

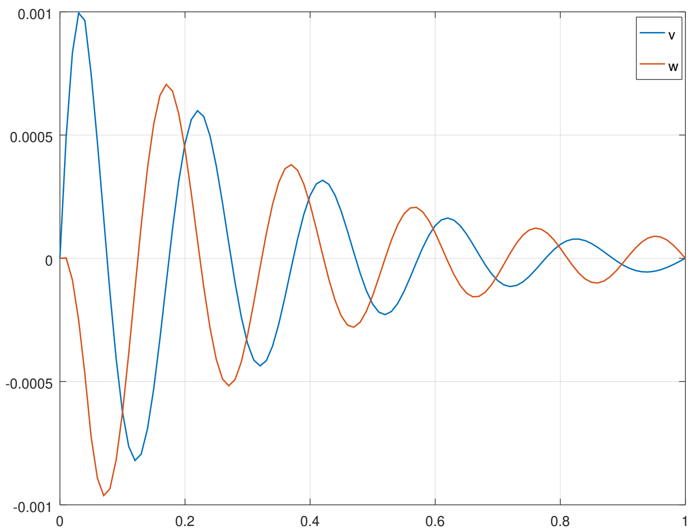
$$\begin{aligned} -\omega^2 v_j - \beta\omega w_j &= c^2\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + f'(x_j), \\ -\omega^2 w_j + \beta\omega v_j &= c^2\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} + f''(x_j), \end{aligned} \tag{4}$$

Notar que los términos disipativos están cruzados (w va con signo - en la ec. de v y v va con signo + en la ec. de w).

Consigna: Resolver las ecuaciones (4) en [0,1] con condiciones de contorno homogéneas $v(0) = v(L) = 0, w(0) = w(L) = 0$ y con un término fuente $f' = (x < x_0)$, $f'' \equiv 0$. Es decir la fuente para v es unitaria en el segmento $[0, x_0]$ y nula en el resto, y f'' es idénticamente nula.

Ayuda:

- Partir del ejemplo **ex23.cpp** para resolver el Laplaciano 1D.
- Dado N el número de intervalos, el número de incógnitas es $n = 2(N+1)$ ya que hay dos campos (v, w) por nodo.
- Numerar las ecuaciones de la siguiente forma $v_0, w_0, v_1, w_1, \ldots$.
- Dada la incógnita j (una fila de la matriz de PETSc), los coeficientes de esa fila son
  - Si j es par entonces tiene coeficientes no nulos en $j-2, j, j+2, j+1$ con coeficientes $-(c/h)^2, 2(c/h)^2 - \omega^2, -(c/h)^2, -\beta\omega$.
  - Si j es impar entonces tiene coeficientes no nulos en $j-2, j, j+2, j-1$ con coeficientes $-(c/h)^2, 2(c/h)^2 - \omega^2, -(c/h)^2, +\beta\omega$.
- Para los nodos de contorno (incógnitas $0, 1, 2N, 2N+1$) simplemente poner 1 en la diagonal ($A_{jj} = 1$) y 0 en el miembro derecho.
- Como ejemplo poner
  - $x_0 = 0.1, c = 1, \omega = 10\pi \approx 31.41, \beta = 0.2\omega$. La solución debe ser similar a esto



- Para esos valores, y para $N = 10$ segmentos ($h = 0.1$, $n = 22$), la matriz debe dar

```
row 0: (0, 1)
row 1: (1, 1)
row 2: (0, -100)  (2, -786.96)  (3, -197.392)  (4, -100)
row 3: (1, -100)  (2, 197.392)  (3, -786.96)  (5, -100)
row 4: (2, -100)  (4, -786.96)  (5, -197.392)  (6, -100)
row 5: (3, -100)  (4, 197.392)  (5, -786.96)  (7, -100)
row 6: (4, -100)  (6, -786.96)  (7, -197.392)  (8, -100)
row 7: (5, -100)  (6, 197.392)  (7, -786.96)  (9, -100)
row 8: (6, -100)  (8, -786.96)  (9, -197.392)  (10, -100)
row 9: (7, -100)  (8, 197.392)  (9, -786.96)  (11, -100)
row 10: (8, -100)  (10, -786.96)  (11, -197.392)  (12, -100)
row 11: (9, -100)  (10, 197.392)  (11, -786.96)  (13, -100)
row 12: (10, -100)  (12, -786.96)  (13, -197.392)  (14, -100)
row 13: (11, -100)  (12, 197.392)  (13, -786.96)  (15, -100)
row 14: (12, -100)  (14, -786.96)  (15, -197.392)  (16, -100)
```

```
row 15: (13, -100)  (14, 197.392)  (15, -786.96)  (17, -100)
row 16: (14, -100)  (16, -786.96)  (17, -197.392)  (18, -100)
row 17: (15, -100)  (16, 197.392)  (17, -786.96)  (19, -100)
row 18: (16, -100)  (18, -786.96)  (19, -197.392)  (20, -100)
row 19: (17, -100)  (18, 197.392)  (19, -786.96)  (21, -100)
row 20: (20, 1)
row 21: (21, 1)
```