Trabajo Práctico Número 9: Ecuaciones de campo y condiciones de contorno

1. Sea V el volumen encerrado por la superficie S cuya normal saliente unitaria es $\boldsymbol{n}$; y sea $\boldsymbol{x}$ el vector posición en un punto en V. Usando el teorema de Gauss y notación indicial mostrar que:

   a. $\int_S x_i n_j \, dS = V\delta_{ij}$.

   b. $\int_S \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) \, dS = 2V\boldsymbol{a}$, donde $\boldsymbol{a}$ es un vector arbitrario constante (independiente de $\boldsymbol{x}$).

   c. $\int_S \lambda \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_V \boldsymbol{w} \cdot \nabla\lambda \, dV$, donde $\boldsymbol{w} = rot(\boldsymbol{v})$, siendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ una función vectorial arbitraria, y $\lambda = \lambda(\boldsymbol{x})$ es una función escalar arbitraria.

2. Sea el movimiento de un cierto medio continuo descrito por las ecuaciones:

   $$x_1 = a_1 e^{-t}, \quad x_2 = a_2 e^{t}, \quad x_3 = a_3 + a_2(e^{-t} - 1)$$

   El campo de temperaturas en dicho medio está dado por:

   $$T(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

   Calcule la derivada material de la temperatura en ese medio.

3. Dos componentes del campo de velocidad de un fluido son conocidas para una región $-2 \le x, y, z \le 2$:

   $$u = (1 - y^2)(a + bx + cx^2), \qquad w = 0.$$

   El fluido es incompresible. ¿Cuál es la componente v en la dirección del eje y?.

4. Sea el campo de temperatura del fluido descripto en el problema anterior:

   $$T = T_0 e^{-kt} \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta y).$$

   Encuentre la derivada material de la temperatura de una partícula ubicada en el origen $x = y = z = 0$. Halle lo mismo para una partícula en $x = y = z = 1$.

5. Considere el momento de todas las fuerzas aplicadas alrededor del origen del sistema de coordenadas $O\text{-}x_1 x_2 x_3$ en un medio continuo V encerrado por la superficie S de normal saliente unitaria $\boldsymbol{n}$:

   $$L_i = \int_V e_{ijk} x_j X_k \, dV + \int_S e_{ijk} x_j \overset{n}{T}_k \, dS$$

   y el momento de momentum

   $$H_i = \int_V e_{ijk} x_j \rho v_k \, dV$$

   donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad y ρ es la densidad del continuo. Verifique que el equilibrio de momentos puede expresarse como:

$$\frac{D}{Dt}H_i = L_i$$

Luego, utilice la fórmula de Cauchy, el teorema de Gauss y la ecuación Euleriana del movimiento para mostrar que

$$\int_V e_{ijk}\sigma_{jk}\, dV = 0\,.$$

6. Sean:

- La energía cinética $K = \int_V \tfrac{1}{2}\rho v_i v_i\, dV$, donde $\boldsymbol{v}$ es el vector velocidad y ρ es la densidad del material;
- La energía gravitacional $G = \int_V \rho\phi(\boldsymbol{x})\, dV$, donde ϕ es el potencial gravitacional por unidad de masa, supuesto independiente del tiempo, o sea $\partial\phi/\partial t = 0$.
- La energía interna $E = \int_V \rho\varepsilon\, dV$, donde ε es la energía interna por unidad de masa.
- La tasa de cambio de la entrada de calor $\dot{Q} = -\int_S h_i n_i\, dS = -\int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\, dV$, donde $\boldsymbol{h}$ es el vector de flujo de calor y $\boldsymbol{n}$ es la normal unitaria saliente.
- La potencia o tasa de cambio del trabajo realizado sobre el cuerpo por las fuerzas de cuerpo no gravitacionales $\boldsymbol{F}$ por unidad de volumen en V y las tracciones $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ por unidad de superficie en S:

$$\dot{W} = \int_V F_i v_i\, dV + \int_S \overset{n}{T_i}\, v_i\, dS\,.$$

a. Calcule el balance de energía:

$$\frac{D}{Dt}(K + G + E) = \dot{Q} + \dot{W}$$

Simplifique las ecuaciones considerando las ecuaciones de continuidad, de movimiento, la simetría de σ_{ij} y el hecho de que las fuerzas de cuerpo totales por unidad de volumen resultan $X_i = F_i + g_i$, con $g_i = -\rho\,\partial\phi/\partial x_i$ las fuerzas de cuerpo gravitacionales por unidad de volumen, para obtener:

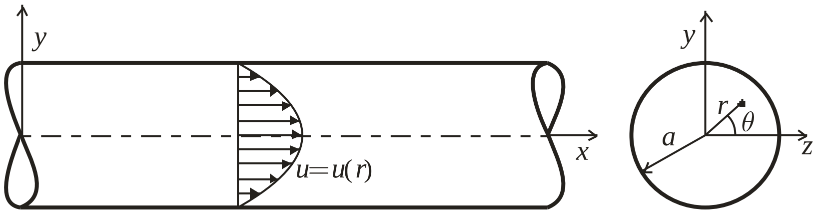
$$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij}V_{ij}$$

con $V_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$.

b. Suponga que el material obedece a la ley constitutiva (de conducción de calor) de Fourier $h_i = -k\,\partial T/\partial x_i$, donde T es la temperatura y k la conductividad térmica, que la energía interna es puramente térmica, dada por $\varepsilon = cT$, donde c es la capacidad calorífica por unidad de masa del material, y que el continuo se halla en reposo ($v_i = 0$). Verifique que el balance de energía se reduce a la conocida como ecuación del calor:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

7. En la figura se muestra el problema del flujo de un fluido incompresible a través de un tubo cilíndrico circular de radio a en posición horizontal. Se asumen condiciones de flujo desarrollado, lejos de la entrada y la salida del tubo.



Suponiendo despreciables las fuerzas de cuerpo, hallar la solución de la forma

$$u = u(r), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Use la siguiente relación entre el Laplaciano de una función f en coordenadas Cartesianas (x, y, z) y en coordenadas cilíndricas (x, r, θ):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Con la solución hallada, mostrar que:

a. la tasa de flujo de masa a través del tubo es $Q = -\dfrac{\pi a^4 \rho}{8} \nabla^2 u$,

b. la velocidad media es $u_m = -\dfrac{a^2}{8} \nabla^2 u$,

c. el coeficiente de fricción en la pared es

$$c_f = \frac{\text{tensión cortante}}{\text{presión dinámica media}} = \frac{-\mu \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} = \frac{16}{R_N} \, ,$$

donde $R_N = \dfrac{2a\rho u_m}{\mu}$ es el número de Reynolds.