Trabajo Práctico Número 7: Ecuaciones constitutivas

1. Muestre que la Ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

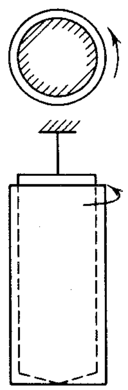
puede reescribirse como

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right], \quad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy},$$
$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right], \quad e_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz},$$
$$e_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right], \quad e_{zx} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zx},$$

si E y ν se relacionan a las constantes de Lamé de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mathrm{G}=\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

2. Considere el flujómetro Couette de la figura



Obtenga la distribución de velocidades en el canal, la expresión de la viscosidad del fluído, y la relación torque-velocidad angular, $T = f(\omega)$. Finalmente, analice cómo cambia el torque para ensayos realizados con distintos fluídos a la misma velocidad angular.

3. Considere un estado bidimensional de tensiones en una placa delgada en la cual $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Las ecuaciones de equilibrio actuando en la placa con cargas distribuidas de cuerpo X, Y (constantes) son

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0.$$

Sabemos que estas ecuaciones se satisfacen idénticamente si $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ se derivan de una función arbitraria $\Phi(x, y)$ en la forma (ver Guía 3):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx$$

a. Demostrar que para un material elástico lineal, para el cual se verifica:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E},$$

las condiciones de compatibilidad se verifican si y solo si:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

Decimos en este caso que $\Phi(x, y)$ satisface la ecuación *biarmónica*. Una función de estas características es llamada *función de tensión de Airy*.

b. Verificar que las funciones del ejercicio 10 de la Guía 3, son funciones de Airy.

c. Qué condiciones se deben cumplir para que la función:

$$\Phi(x, y) = ax^4 + bx^3 y + cx^2 y^2 + dxy^3 + ey^4$$

sea una función de Airy?

d. Qué condiciones se deben cumplir para que la función:

$$\Phi(x, y) = ax^5 + bx^4 y + cx^3 y^2 + dx^2 y^3 + exy^4 + fy^5$$

sea una función de Airy?

4. Muestre que el polinomio

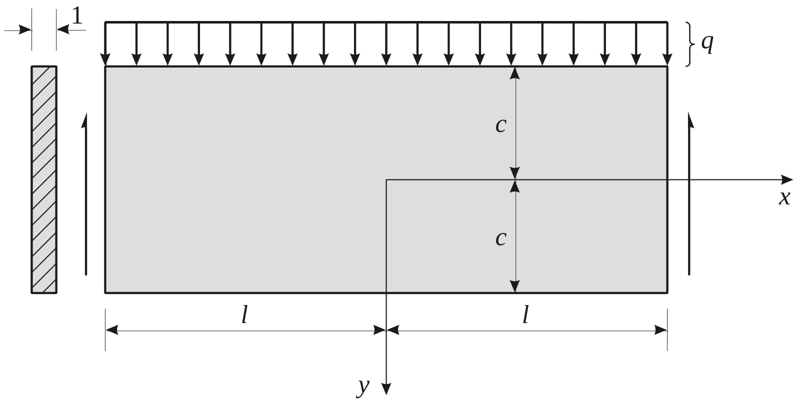
$$\Phi = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2}y^2$$

es una *función de tensión de Airy*. Examine las condiciones de borde satisfechas por esta función sobre las aristas de una placa rectangular: $x = \pm L$, y $y = \pm C$; de este modo, identifique el problema para cual Φ es la solución.

5. Haga lo mismo para

$$\Phi = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2 y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3.$$

6. Una placa delgada de material Hookeano isotrópico se carga sobre las fronteras como se muestra en la figura



No hay fuerzas de cuerpo. Se sugiere que la distribución de tensiones sea

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{2I}\left(l^2 - x^2\right)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y\right)$$
$$\sigma_{yy} = -\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2 y + \frac{2}{3}c^3\right)$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{q}{2I}\left(c^2 - y^2\right)x$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = 0$$

donde q es la carga por unidad de área y $I = 2c^3 / 3$ es una constante. Determine si la solución es correcta o no.