Trabajo Práctico Número 6: Campos de velocidad y condiciones de compatibilidad

1. Considere el movimiento de un fluido con componentes de velocidad u y v derivadas de un potencial Φ:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

mientras que la componente w es idénticamente cero. Dibuje los campos de velocidad para los potenciales siguientes:

a) $\Phi = \dfrac{1}{4\pi}\log(x^2+y^2) = \dfrac{1}{2\pi}\log r,$ $\qquad (r^2 = x^2+y^2)$

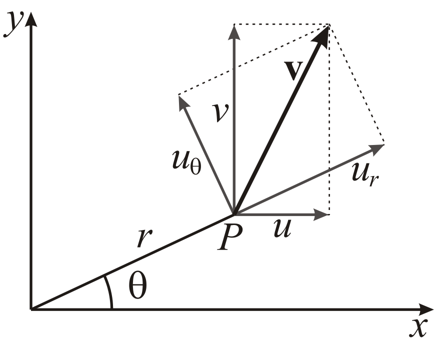
b) $\Phi = x,$

c) $\Phi = Ar^n \cos n\theta,$ $\qquad \left(\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$

d) $\Phi = \dfrac{\cos\theta}{r},$

Se recomienda presentar los resultados utilizando software como Matlab® u Octave(GNU).

Nota: Un flujo de un campo cuyas componentes de velocidad se obtienen de una función potencial $\Phi(x,y,z)$ es llamado *flujo potencial*. En los ejemplos mencionados en este problema tenemos varios casos en los cuales Φ se expresa en términos de coordenadas polares r, θ. Si notamos que el vector velocidad (u,v) es exactamente el gradiente de una función escalar $\Phi(x,y,z)$, vemos por análisis vectorial que las componentes de velocidad en coordenadas polares son:



$$u_r = \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial \theta},$$

donde u_r, u_θ son las componentes de velocidad en las direcciones radial y tangencial, respectivamente. Quedan relacionadas con las componentes en coordenadas Cartesianas de esta forma:

$$u_r = \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u\cos\theta + v\sin\theta,$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = -u\sin\theta + v\cos\theta.$$

2. El movimiento de un fluido incompresible en dos dimensiones puede obtenerse de una función *de corriente* Ψ del siguiente modo:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad w = 0.$$

Esquematice las líneas de corriente $\Psi = \mathrm{cte}$ para las siguientes funciones y compare los resultados con los del problema anterior:

a) $\Psi = c\theta,$

b) $\Psi = y,$

c) $\Psi = Ar^n \sin n\theta,$

d) $\Psi = -\dfrac{\sin\theta}{r}.$

Superponga las gráficas de estas funciones con su correspondiente campo del ejercicio 1.

3. Para los flujos descriptos por los potenciales listados en el ejercicio de arriba,

a) Muestre que la vorticidad desaparece en cada caso.

b) Obtenga las expresiones para el tensor tasa de deformación.

4. Suponga que se nos da el siguiente campo de desplazamiento definido en un círculo unitario,

$$\begin{aligned} u &= ax^2 + bxy + c, \\ v &= by^2 + cx + mz, \\ w &= mz^3. \end{aligned}$$

¿Existe compatibilidad?.

5. Suponga que el campo de desplazamiento en un círculo unitario es

$$\begin{aligned} u &= ar\ \log\theta, \\ v &= ar^2 + \mathrm{c}\ \sin\theta, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

a) ¿El campo es compatible?

b) Grafique el campo de desplazamientos e interprete los resultados.

Ayuda: Convertir el campo de desplazamientos a coordenadas polares y luego utilizar la siguiente condición de compatibilidad*:

$$S_{zz} \equiv \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta r}}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} = 0.$$

También puede verificar esta ecuación de compatibilidad utilizando sofware simbólico (Maple®, Mathematica®, Matlab®, Octave(GNU) ó Maxima(GNU)).

* Tomada del Apéndice II.4, Pág. 669, del libro *"Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium"*, por Lawrence E. Malvern, Ed. Prentice Hall, 1969.

6. *Rotación infinitesimal y vorticidad.* Sean $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})$ campos de desplazamiento y velocidad, respectivamente. Definimos el tensor de *spin* o de *rotación infinitesimal* como

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Para este tensor, construimos un vector *dual* (vector de *rotación*)

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\omega_{ij} \qquad \rightarrow \qquad \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \quad (7.1)$$

Por otra parte, definimos el tensor de *vorticidad* como

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

Para este tensor, construimos un vector *dual* (vector de *vorticidad*) con una convención ligeramente distinta a la anterior:

$$\Omega_k = \varepsilon_{kij}\Omega_{ij} \qquad \rightarrow \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k \quad (7.2)$$

(notar que esta definición está cambiada en la tercera edición de Fung respecto de la segunda edición).

a. Demostrar que el vector de rotación o de spin puede interpretarse físicamente como la rotación que sufre el entorno del punto considerado.

b. Demostrar la relación que da el tensor de rotación en función de su vector dual (ec. 7.1).

c. Demostrar la relación que da el tensor de vorticidad en función de su vector dual (ec. 7.2).

d. Demostrar que

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}(\mathbf{v})$$

e. Dar la interpretación física del vector vorticidad.