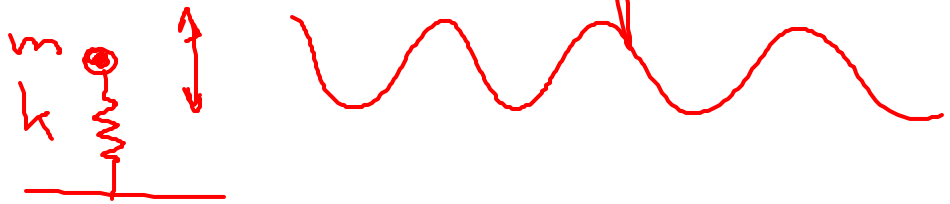
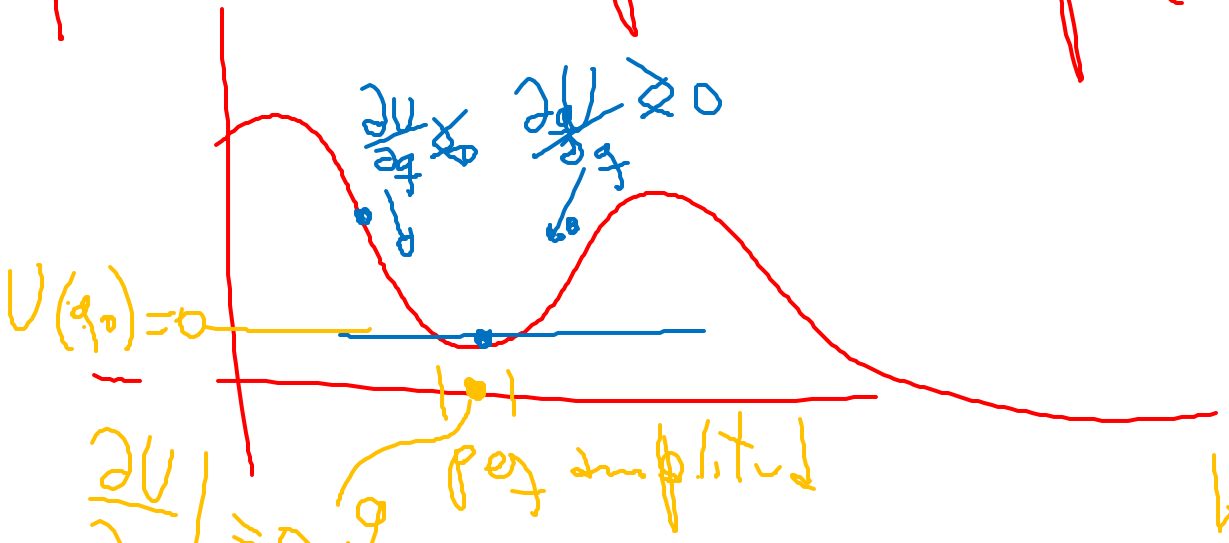
4 OSCILACIONES PEQ AMPLITUD

i) Oscilaciones de 1 GDL

Oscilaciones en torno a una posición de equilibrio.



Equilibrio corresponde a una posición de $U(q)$ mínima.



$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

$$U(q) - U(q_0) \simeq \frac{1}{2} k (q - q_0)^2$$

$$k = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q_0}$$

$$x \triangleq q - q_0 \implies \dot{x} = \dot{q}$$

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad T = \frac{1}{2} a(q)\,\dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q)\,\dot{x}^2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \underbrace{a(q_0)}_{m}\,\dot{x}^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

Ec de mov:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ω: frec circular $\left[\frac{rad}{sec}\right]$

f: frec $\left[\frac{ciclos}{sec}\right] \equiv [Hz]$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Sol gral

$$x = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = a \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$$

$$= \underbrace{a \cos \alpha}_{c_1} \cos \omega t - \underbrace{a \sin \alpha}_{-c_2} \sin \omega t$$

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \tan \alpha = -c_2/c_1$$

c_1, c_2 ó a, α ctes a determinar a partir de las CI

$x_0, \dot{x}_0$ dados $\Longrightarrow$ $c_1 = x_0$

$$\dot{x} = -\omega c_1 \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

$$\dot{x}(0) = c_2 \omega \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = (*)$$

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$(*) = \frac{m a^2 \omega^2}{2} \sin^2(\quad) + \frac{k}{2} a^2 \cos^2(\quad) = \frac{m a^2 \omega^2}{2} \underbrace{(\sin^2 + \cos^2)}_{1}$$

$$k = m\omega^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2}$$

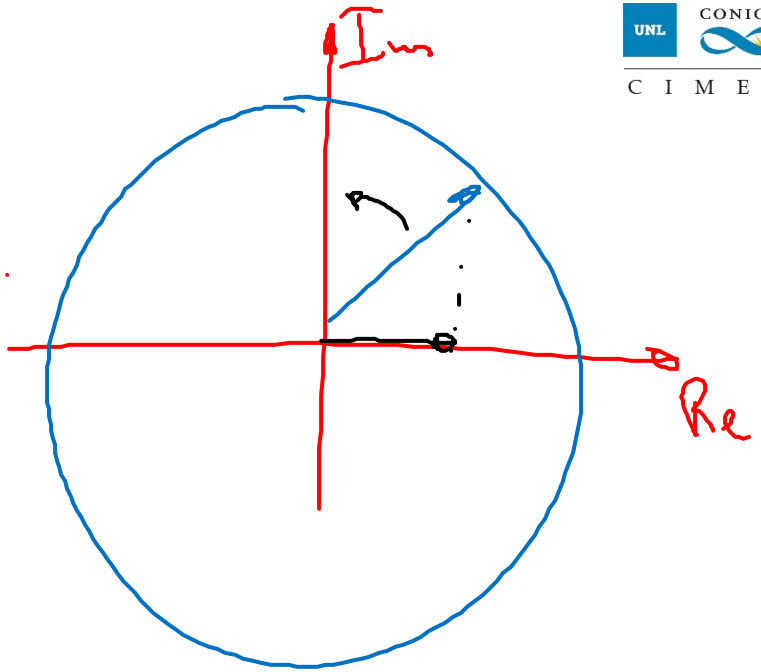
Energ total depende cuadráticamente de la amplitud.

$$(**) \quad x = \mathrm{Re}\left[A \exp(i\omega t)\right]$$

$$(*) \quad a \exp(i\alpha) = A$$: <u>amplitud compleja</u>.

$$\dot{x} = \mathrm{Re}\left[A\, i\omega \exp(i\omega t)\right]$$

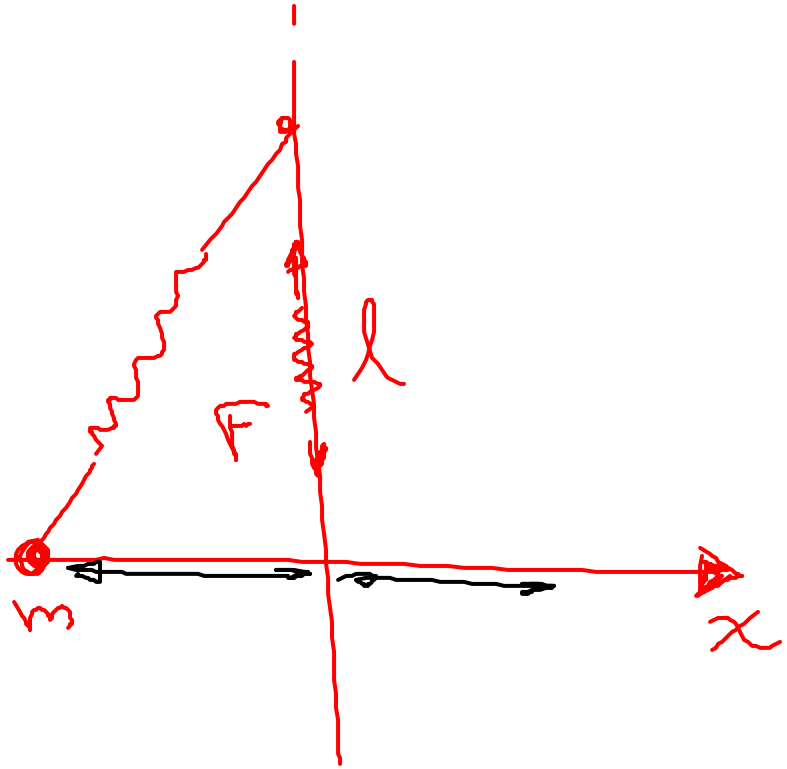
$$\ddot{x} = \mathrm{Re}\left[-A\, \omega^2 \exp(i\omega t)\right]$$



$$\exp(i\omega t) \equiv \cos\omega t + i \sin\omega t$$

Reemplazando (*) en (**) llegamos a

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$



$F \Longrightarrow$ estirar el resorte a long l

A primer orden la energía potencial va a aumentar:

$$\delta U = F\,\delta l$$

$$x = 0 \Longrightarrow l$$

$$x = x \Longrightarrow \sqrt{l^2 + x^2}$$

$$\delta l = \underbrace{\sqrt{l^2 + x^2} - l}_{x = 0 \,\longrightarrow\, 0}$$

$$\delta l = f(x) = \sqrt{l^2+x^2} - l$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{l^2+x^2}} = 0$$

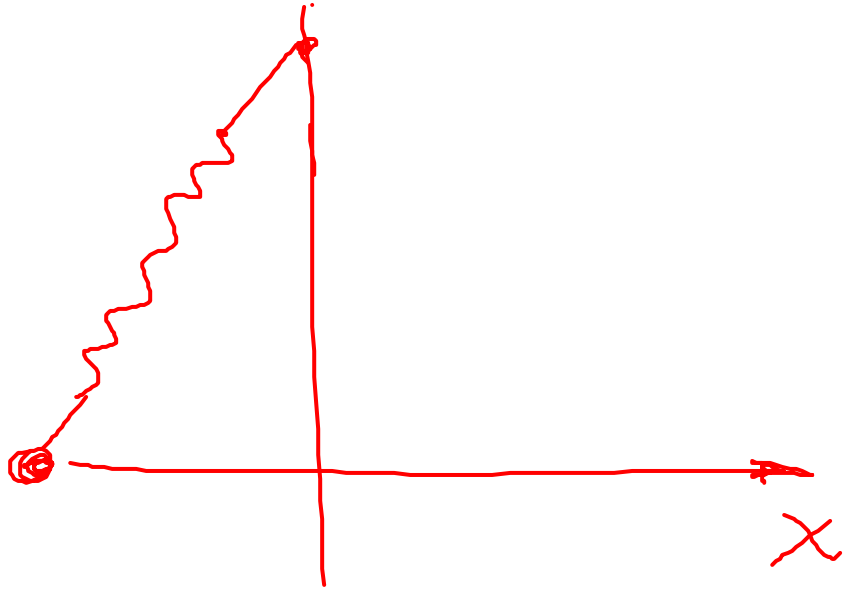
$$f''(0) = \left.\frac{\sqrt{l^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{l^2+x^2}}}{l^2+x^2}\right|_0 = \frac{1}{\sqrt{l^2}} = \frac{1}{l}$$

$$f(x) \approx \frac{x^2}{2l} \Longrightarrow U(x) = \frac{x^2}{2l}F$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{F}{2l} x^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F}{ml}}$$



Oscilaciones forzadas

Consideremos la acción de una fuerza externa. $\Rightarrow$ genera un término adicional en la energía potencial $U_e(x,t)$

Asumimos oscilaciones de peq. amplitud.

$$U_e(x,t) \approx \underbrace{U_e(0,t)}_{\text{sólo f del tiempo}} + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$$

$$F = -\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}$$

es la fuerza "externa" actuando en el sistema.

$$\therefore \quad U_e(x,t) = -x F(t)$$

y el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + x F(t)$$

Derivando las ecs de movimiento:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

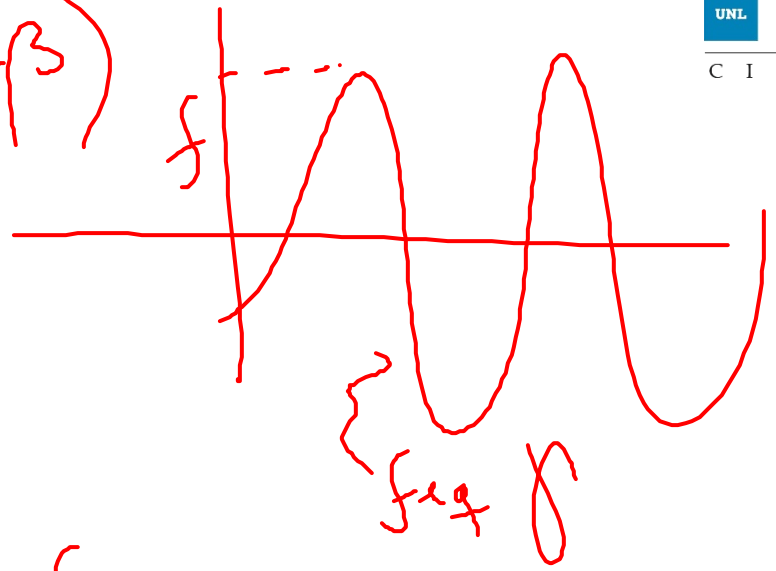
div x la masa

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F/m$$

Sol: suma de la homogénea (vibraciones libres) + particular.

Caso de interés:

$$F(t) = f\cos(\gamma t+\beta)$$



$$x_1 = b\cos(\gamma t+\beta)$$

$$\ddot{x}_1 = -b\gamma^2\cos(\gamma t+\beta)$$

$$-b\gamma^2\cancel{\cos(\gamma t+\beta)} + b\omega^2\cancel{\cos(\gamma t+\beta)} = \frac{f}{m}\cancel{\cos(\gamma t+\beta)}$$

$$b = \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}$$

Válido si $\omega^2 \neq \gamma^2$

Sol gral:

$$x = a\cos(\omega t+\alpha) + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta)$$

a, α : f(CI)

Si $\omega^2 = \gamma^2$?

$$x = a\cos(\omega t+\alpha) + \left[\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\right]\left(\cos(\gamma t+\beta) - \cos(\omega t+\beta)\right)$$

$\gamma \to \omega$

Lo que hizo fue reescribir:

$$a\cos(\omega t+\alpha) \longrightarrow c\cos(\omega t+\delta) + d\cos(\omega t+\beta)$$

$$\mathrm{Re}\left[A e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(B+D)\, e^{i\omega t}\right]$$

$$B = A - D$$

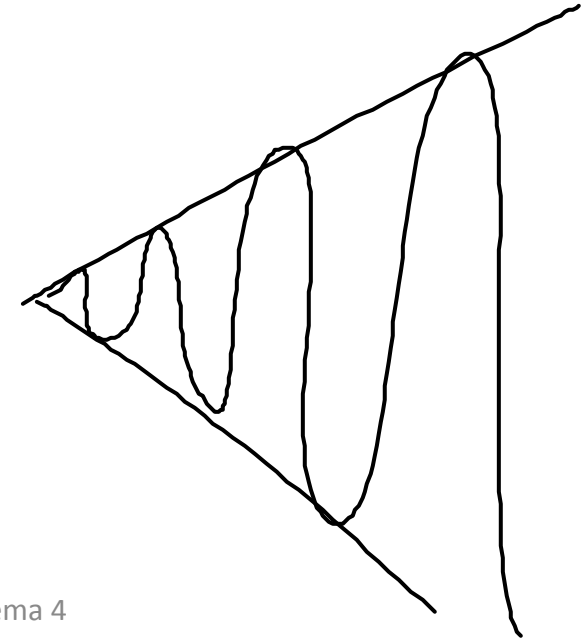
EJERCICIO

P/eliminar indeterminación $0/0 \Rightarrow$ L'Hôpital

$$\lim_{\gamma \to \omega} \left(\quad \right) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \frac{+t\sin(\gamma t + \beta)}{+2\gamma} =$$

$$\gamma = \omega \qquad x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega}\sin(\omega t + \beta)\, t$$

En resonancia, la amplitud de oscilación crece linealmente con el tiempo.



"Casi" resonancia? $\Omega \neq \omega$, pero $\Omega \approx \omega$

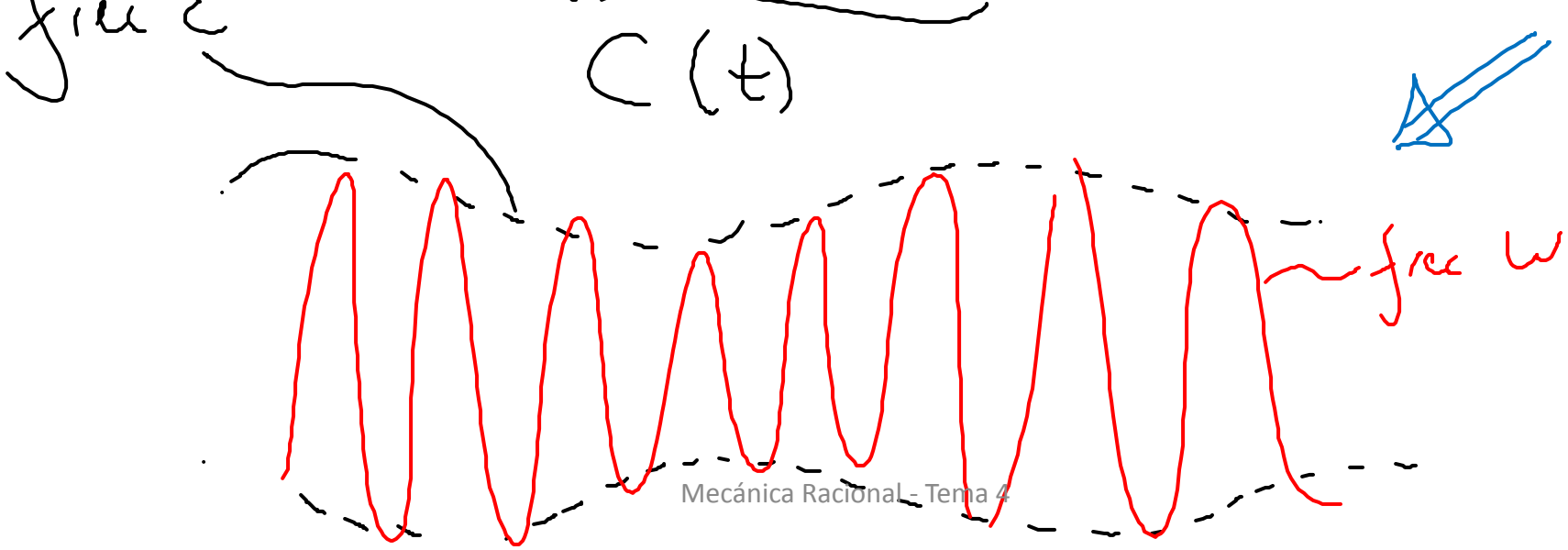
$\Omega = \omega + \varepsilon$ $\quad \underline{\varepsilon \ll \omega}$

La solución gral, en forma compleja:

$$x = A\exp(i\omega t) + B\exp(i(\omega+\varepsilon)t) =$$

$$x = \underbrace{\left[A + B\exp(i\varepsilon t)\right]}_{C(t)} \exp(i\omega t)$$

FENOMENO DE "BATIDO"



$$C = A + B\exp(i\varepsilon t) = \qquad \left(\begin{array}{l} A = a\exp(i\alpha) \\ B = b\exp(i\beta) \end{array}\right)$$

$$= a\exp(i\alpha) + b\exp(i(\beta+\varepsilon t)) =$$

$$= \underbrace{a\cos\alpha + b\cos(\beta+\varepsilon t)}_{C_R} + i\underbrace{\left[a\sin\alpha + b\sin(\beta+\varepsilon t)\right]}_{C_I}$$

$$C^2 = C_R^2 + C_I^2$$

$$C^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2(\beta+\varepsilon t) + 2ab\cos\alpha\cos(\beta+\varepsilon t) +$$
$$a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2(\beta+\varepsilon t) + 2ab\sin\alpha\sin(\beta+\varepsilon t) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\left[\cos(\beta+\varepsilon t)\cos\alpha + \sin(\beta+\varepsilon t)\sin\alpha\right] =$$

$$\boxed{C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\beta+\varepsilon t-\alpha)}$$

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \underbrace{\cos(\beta + \varepsilon t - \alpha)}_{\in [-1,1]}$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \leq C^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

$$|a-b| \leq C \leq a+b$$

Sea una $F(t)$ arbitraria.

Escribimos la ec de movimiento de la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x} + i\omega x\right) - i\omega\left(\dot{x} + i\omega x\right) = \frac{1}{m} F(t)$$

Notar

$$\ddot{x} + \cancel{i\omega\dot{x}} - \cancel{i\omega\dot{x}} + \omega^2 x = F/m$$

Llamando

$$\xi = \dot{x} + i\omega x$$

$$\xi_0 = \dot{x}_0 + i\omega x_0$$

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = F/m$$

La sol homogénea: $\xi = A \exp(i\omega t)$ A cte

Buscamos sol inhomogénea en la forma $\xi = A(t) \exp(i\omega t)$

$$\dot{\xi} = \dot{A}(t) \exp(i\omega t) + A(t)\, i\omega \exp(i\omega t)$$

$$-i\omega \xi = -i\omega A(t) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{F(t)}{m} = \dot{A}(t) \exp(i\omega t) \Rightarrow \dot{A}(t) = \frac{F(t)}{m} \exp(-i\omega t)$$

$$\boxed{\xi(t) = \exp(i\omega t) \left(\int_0^t \frac{F(t)}{m} \exp(-i\omega t)\, dt + \xi_0 \right)}$$

VER INTEGRAL DE DUHAMEL (CLOUGH)

La energía de un sistema c/ oscilaciones forzadas no se conserva. El sistema gana energía desde el potencial externo.

Calculemos la energía total transferida al sistema en el tiempo asumiendo energía inicial cero. $\Rightarrow \xi_0 = 0$

$$\left|\xi(\infty)\right|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\exp(-i\omega t)\,dt\right|^2 \qquad \xi = \dot{x} + i\omega x$$

La energía:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) = \frac{1}{2}m\left|\xi\right|^2$$

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t)\, dt \right|^2$$

Si la fuerza actúa sobre un tiempo corto (respecto de $1/\omega$)

$$E = \frac{1}{2m} \left| \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt \right) \right|^2$$

Oscilaciones en sistemas de más de 1 GDL

U energía pot función de coordenadas q_i $(i = 1, 2 \dots s)$

$U(q_i)$ tiene un mínimo en q_{i0}

$$\left(\left. \frac{\partial U}{\partial \underline{q}} \right|_{\underline{q}_0} = \underline{0} \right) \quad (*)$$

Definimos

$$\underline{x} = \underline{q} - \underline{q}_0$$

Desarrollando por Taylor y usando $(*)$ $\quad U = \frac{1}{2} k_{ik} x_i x_k$

$$U = \frac{1}{2}\, \underline{x}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{x} \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \\ k_{21} & k_{22} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$k_{ik} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}\right|_{\underline{x}=0} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}\right|_{\underline{x}=0} = k_{ki} \Longrightarrow \underline{\underline{K}} \text{ simétrica}$$

$$\underline{x} = \underline{q} - \underline{q}_0$$

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{q}}$$

$$T = \frac{1}{2}\, a_{ik}(\underline{q})\, \dot{q}_i \dot{q}_k \cong \frac{1}{2} \underbrace{a_{ik}(\underline{q}_0)}_{m_{ik}} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

$$m_{ik} = m_{ki}$$

$$T = \frac{1}{2}\, m_{ik}\, \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2}\, \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{\underline{q}} = \frac{1}{2}\, \dot{\underline{x}}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{\underline{x}}$$

$\underline{\underline{M}}$ simétrica

MAY?

REVISAR

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_{ik}\, \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik}\, x_i x_k \right)$$

Ecs del movimiento

$$dL = \frac{1}{2}\left(m_{ik}\, d\dot{x}_i\, \dot{x}_k + m_{ik}\, \dot{x}_i\, d\dot{x}_k - k_{ik}\, dx_i\, x_k - k_{ik}\, x_i\, dx_k\right)$$

Usando simetría $\qquad m_{ik} = m_{ki}$

$$dL = m_{ik}\, \dot{x}_k\, d\dot{x}_i - k_{ik}\, x_k\, dx_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_{ik}\, \dot{x}_k \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = k_{ik}\, x_k$$

Ecs de movimiento

$$m_{ik}\, \ddot{x}_k + k_{ik}\, x_k = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots s$$

$$\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}}\, \underline{x} = \underline{0}$$

Sist ecs diferenciales 2° orden homogéneo. coef ctes.

Sol gral

$$x_k = A_k \exp(i\omega t)$$

A_k: ctes a determinar

$$\ddot{x}_k = -\omega^2 A_k \exp(i\omega t)$$

Reemplazando

$$(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0$$

"modos de vibración"

Prob de autovalores. Buscamos cuando se tienen soluciones no triviales ($A_k \neq 0$)

$$\det(k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) = 0$$

$\underline{\underline{K}}, \underline{\underline{M}}$ simet, $\underline{\underline{M}}$ def positiva:

Ec característica de grado s en ω^2

Tiene s raíces reales positivas ω_α^2 $(\alpha = 1, \dots s)$

En casos particulares, algunas de las raíces ω_α pueden coincidir

$\omega_\alpha \rightarrow$ frecuencias características o frec. propias del sistema.

<u>Notar</u>: si $\omega_\alpha \in \mathbb{C}$, en $x_k = A_k \exp(i\omega t)$

aparecería un factor exponencialmente creciente o decreciente, lo cual es inadmisible porque implicaría variación de la energía total y pérdida de conservatividad.

$$x_k = A_k \exp\left(i(\omega_R + i\omega_I)t\right) = \underbrace{A_k \exp(-\omega_I t)}\exp(i\omega_R t)$$

Supongamos ω_α conocido. (Hemos resuelto el prob de valores propios generalizado: $\underline{\underline{K}}\,\underline{A} = \omega^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{A}$)

Podemos substituir en

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_\alpha^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{A}^\alpha = 0 \Rightarrow \text{calculamos } \underline{A}^\alpha$$

Tenemos luego pares $(\omega_\alpha, \underline{A}^\alpha)$

Calculadas las ω_α, $\alpha = 1, \dots s$, substituimos en

$$\sum_k \underbrace{\left(-\omega_\alpha^2 m_{ik} + k_{ik}\right)}_{S_{ik}^\alpha} A_k^\alpha = 0$$

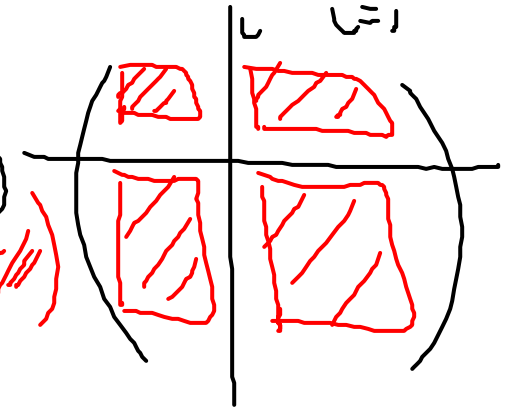
P/calcular A_k^α

$$\det \underline{\underline{S}}^\alpha = 0$$

Desarrollo el $\det S^\alpha$ por una fila j:

$$\det S^\alpha = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+j} s_{ji} M_i^\alpha = \sum_{i=1}^{s} s_{ji} \underbrace{\Delta_{i\alpha}}_{\text{"cofactor"}}$$

M_i^α: "menor" iesimo $\longrightarrow$



$M = \det(\text{submatriz})$

Luego:

$$S^{\alpha}_{ik}\Delta_{k\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det S & \text{si } i = j \end{cases}$$

y como $\det S = 0$

$$S^{\alpha}_{ik}\Delta_{k\alpha} = 0 \implies \Delta_{k\alpha} \text{ es el autovector nulo de } S^{\alpha}$$

O sea:

$$k_{ik}\Delta_{k\alpha} = \omega^2_{\alpha}\, m_{ik}\Delta_{k\alpha}$$

$$\underline{x_k} = \mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)\right) = \underline{\sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha}$$

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\left(C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)\right) \Leftarrow \text{OSCILACIÓN SIMPLE} \quad (*)$$

$\therefore$ x_k superposición de s armónicos simples de frecuencia ω_α y amplitud y fase a determinar C_α

$$x_k = f(\Theta_\alpha) \Rightarrow \text{invertido} \quad \Theta_\alpha = f(x)$$

Luego podemos ver a Θ_α como un conjunto de coordenadas generalizadas que llamamos "coordenadas normales" y que ejecuta un movimiento de oscilación simple.

Las Θ_α responden a la ecuación:

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0$$

(la solución de esta ecuación es (*))

Esto significa q/ los Θ_α responden de manera independiente, desacoplada.

P/ calcular la resp del sist en coord generalizadas debo recordar:

$$x_k = \sum \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha(t) \Rightarrow \dot{x}_k = \Delta_{k\alpha} \dot{\Theta}_\alpha$$

El Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \sum \left(m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k \right)$$

El prob de autovalores:

$$\Delta_{i\beta}\, k_{ik}\, \Delta_{k\alpha} = \omega_\alpha^2 \Delta_{i\beta}\, m_{ik}\, \Delta_{k\alpha}$$

P/ otro fec

$$\Delta_{i\alpha}\, k_{ik}\, \Delta_{k\beta} = \omega_\beta^2 \Delta_{i\alpha}\, m_{ik}\, \Delta_{k\beta}$$

$$0 = (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)\, \Delta_{i\beta}\, m_{ik}\, \Delta_{k\alpha}$$

Si $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$ $\Longrightarrow$ $\Delta_{i\beta}\, m_{ik}\, \Delta_{k\alpha} = 0 \Rightarrow \Delta$ son m-ortogonales

(Asumimos $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$ $\forall \alpha, \beta$)

Definimos

$$m_\alpha = \Delta_{i\alpha}\, m_{ik}\, \Delta_{k\alpha} \Rightarrow \Delta_{i\alpha}\, k_{ik}\, \Delta_{k\alpha} = m_\alpha \omega_\alpha^2$$

$$\Delta_{i\beta}\, m_{ik}\, \Delta_{k\alpha} = \delta_{\alpha\beta}\, m_\alpha \quad \text{(sin suma en } \alpha\text{)}$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \underline{A}^1 & \underline{A}^2 & \underline{A}^3 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_s^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Omega}}$$

$$\dot{x}_i m_{ik} \dot{x}_k = \Delta_{i\beta} \dot{\Theta}_\beta \, m_{ik} \Delta_{i\alpha} \dot{\Theta}_\alpha =$$

$$= \dot{\Theta}_\beta \underbrace{\left(\delta_{\alpha\beta} m_\alpha\right)}_{\text{no hay suma en } \alpha} \dot{\Theta}_\alpha = m_\alpha \dot{\Theta}_\alpha^2$$

$$x_i k_{ik} x_k = \Delta_{i\beta} \Theta_\beta \, k_{ik} \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha =$$

$$= \Theta_\beta \, m_\alpha \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \Theta_\beta = \left(m_\alpha \omega_\alpha^2\right) \Theta_\alpha^2$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2\right)$$

Es habitual escalar p/q el coef de loc sea $1/2$

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\, \Theta_\alpha \implies L = \sum_\alpha \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right)$$

$$x_k = \Delta_{k\alpha}\,\Theta_\alpha = \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}\,Q_\alpha$$

Cuando se hace esto, decimos los modos están M-ortonormalizados

$$\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}\,m_{kj}\,\frac{\Delta_{j\beta}}{\sqrt{m_\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$$

Y con esos modos se verifica:

$$\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}\,k_{kj}\,\frac{\Delta_{j\beta}}{\sqrt{m_\beta}} = \delta_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha^2 \qquad (\text{sin suma en } \alpha)$$

Usando coordenadas normales, podemos calcular la respuesta forzada; reduciendo a la superposición de s sistemas de 1 GDL

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k$$

Reemplazo p/ coord normales:

$$L = \frac{1}{2}\sum \left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) + \underbrace{\sum_k F_k \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}}_{f_\alpha} Q_\alpha$$

Las ecs de movimiento:

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha \qquad \alpha = 1, \dots s$$

Estamos viendo q/ la respuesta del sistema resulta:

$$x_k = \sum \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} Q_\alpha \qquad (*)$$

Los Q_α son solución de $\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha$

En muchos casos, se sabe q/ la contribución en $(*)$ para α grande no es importante.

Entonces, se puede aproximar $R < S$

$$x_k \simeq \sum_{\alpha=1} \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} Q_\alpha$$

Oscilaciones amortiguadas

Hasta ahora se consideró, por ejemplo, movimientos en el vacío. Si no es así, hay un gasto de energía por la resistencia del medio externo. Esta energía se transforma en calor (disipación).

En estas condiciones, el problema no es más puramente mecánico.

En ciertos casos, podemos considerar estos efectos como modificaciones simples de la ecuación de movimiento:

frec. de oscilación pequeña respecto de las del proceso disipativo.

tiempos característicos mecánicos >> tiempo característ. disipación

En esta condición, vemos al sistema como actuado por una fuerza q/se opone al movimiento. Esta fuerza depende solamente de la velocidad.

Asumiendo expresión en potencias de velocidad y quedandonos q/el primer término:

$$f_{Fr} = -\alpha \dot{x}$$

α: cte positiva

fuerza de amortiguamiento

En la ec de movimiento:

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x}$$

$k/m = \omega_0^2$

Definimos $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ coeficiente de amortiguamiento

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Buscamos soluciones de la forma $x = \exp(rt)$

$$\dot{x} = r \exp(rt)$$

$$\ddot{x} = r^2 \exp(rt)$$

$$\underbrace{\left(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2\right)}_{\text{ec característica}} \cancel{\exp(rt)} = 0$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La sol gral

$$x = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t)$$

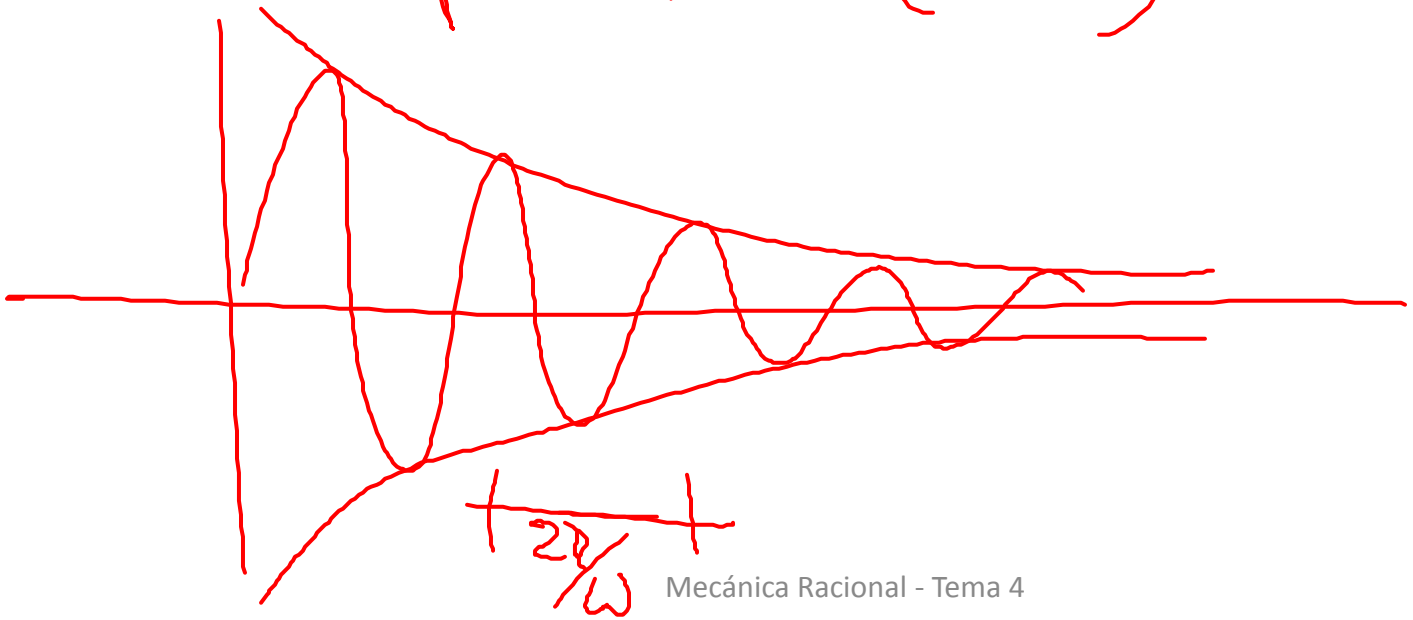
Si $\lambda < \omega_0 \Rightarrow r_{1,2}$ complejos conjugados

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

La solución luego resulta:

$$x = \mathrm{re}\left\{A \exp\left(-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\, t\right)\right\} =$$

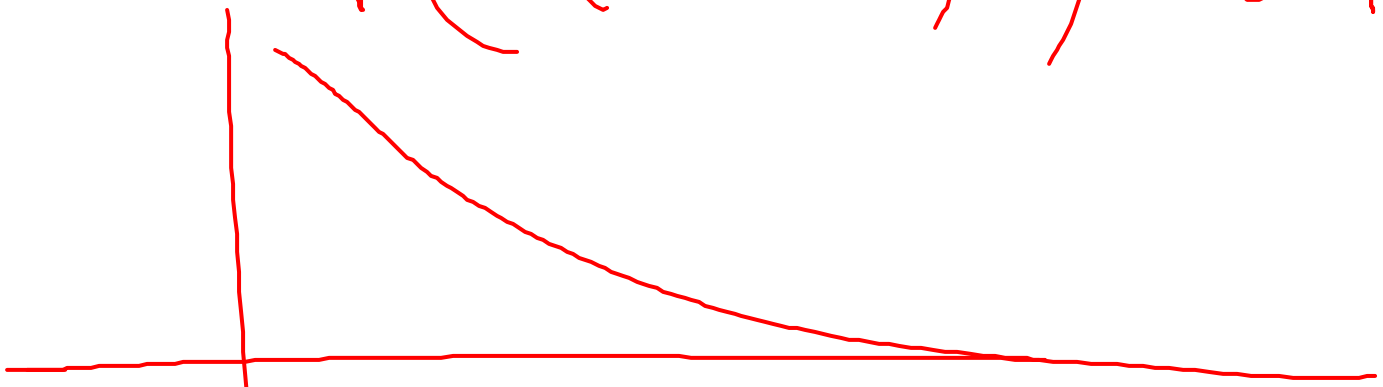
$$= a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$



Si $\lambda > \omega_0$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$$

$$x = c_1 \exp\left(-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t\right) + c_2 \exp\left(-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t\right)$$



$\lambda = \omega_0 \Rightarrow r_{1,2} = -\lambda \Rightarrow x = (c_1 + c_2 t)\exp(-\lambda t)$

Sist amortig varios GDL

Asume, siguiendo la misma idea:

$$f_{Fr,i} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k$$

f lineal de las velocidades.

Por razonamientos de mecánica estadística $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$

Escrito así, podemos asumir la existencia de una función de disipación

$$f_{Fr,i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

donde $F = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$

En las ecs de Lagrange, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

La función de disipación tiene significado físico: da la tasa de disipación de energía del sistema

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{d}{dt}L + \ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\frac{d}{dt}(L) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

F es una función cuadrática de las velocidades.

<u>Def</u>: F homogénea de grado n si $F(\gamma \underline{x}) = \gamma^n F(\underline{x})$

<u>Teo</u> (Euler homog) Si F homog grado n, luego:

$$x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = n F(\underline{x})$$

<u>D)</u> Sea $\underline{x}' = \gamma \underline{x}$ $\Rightarrow$ $\gamma^n F(\underline{x}) = F(\gamma \underline{x}) = F(\underline{x}')$

Derivo respecto a γ $\quad n \gamma^{n-1} F(\underline{x}) = \frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \gamma} = \frac{\partial F}{\partial x'_i} x_i$

haciendo $\gamma = 1$ $\quad n F(\underline{x}) = x_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$

Luego $\dfrac{dE}{dt} = -\sum \dot{x}_i \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = -2F$

la tasa de pérdida de energía es $2 \times F$

Como la disipación produce pérdida de energía $\Rightarrow$ luego debe ser $F > 0$ o sea F definida positiva $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\alpha}}$ def posit

Las ecs de mov:

$$m_{ik}\ddot{x}_k + \alpha_{ik}\dot{x}_k + k_{ik}x_k = 0$$

Asumiendo

$$x_k = A_k \exp(rt)$$

obtenemos:

$$\left(m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}\right)A_k = 0$$

Prob de autovalores cuadrático.

$$\det\left(m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}\right) = 0$$

25 raíces < reales / pares complejos conjugados

polyeig: Polynomial eigenvalue problem

Syntax

[X,e] = polyeig(A0,A1,...Ap)

e = polyeig(A0,A1,..,Ap)

Description

[X,e] = polyeig(A0,A1,...Ap) solves the polynomial eigenvalue problem of degree p where polynomial degree p is a non-negative integer, and A0,A1,...Ap are input matrices of order n. The output consists of a matrix X of size n-by-n*p whose columns are the eigenvectors, and a vector e of length n*p containing the eigenvalues.

If lambda is the jth eigenvalue in e, and x is the jth column of eigenvectors in X, then (A0 + lambda*A1 + ... + lambda^p*Ap)*x is approximately 0.

e = polyeig(A0,A1,..,Ap) is a vector of length n*p whose elements are the eigenvalues of the polynomial eigenvalue problem.

Resonancia paramétrica

∃ sistemas oscilantes q/no son cerrados, en los cuales la acción externa se debe a una variación temporal de los parámetros.

Parámetros en un sist 1GDL? $\Longrightarrow$ $m(t)$, $k(t)$

Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$$

Definimos una variable τ / $d\tau = \frac{dt}{m(t)}$

Obtenemos $\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0$

Podemos entonces considerar, sin pérdida de generalidad

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)\, x = 0 \qquad (*)$$

La forma de $\omega^2(t)$ está dada por el problema.

Asumimos periódica de frec γ y $T = \frac{2\pi}{\gamma}$

$$\omega(t+T) = \omega(t) \Longrightarrow (*) \text{ es invariante frente a una traslación } t \to t+T$$

$x(t)$ es solución $\Rightarrow$ $x(t+T)$ sea solución

O sea, si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones independientes de $(*)$, al reemplazar $t \to t+T$ deben transformar en combinaciones lineales de ellas mismas.

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

En particular, $x_1(t+T), x_2(t+T)$ son soluciones y las puedo calc:

$$x_1(t+T) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t)$$

Podemos imaginar otras, $x_1^*(t), x_2^*(t)$ $CL(x_1, x_2)$:

$$\cancel{\underline{\underline{C}}} \begin{pmatrix} x_1^*(t+T) \\ x_2^*(t+T) \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix}$$

Puedo elegir $\underline{\underline{C}}$ adecuadamente p/q $\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}}$ diagonal:

$$\begin{pmatrix} x_1^*(t+T) \\ x_2^*(t+T) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}\,\Lambda \Rightarrow \Lambda \text{ autov de } \underline{\underline{A}}$$

$\underline{\underline{C}}$ matriz ~~todos~~ autovect de $\underline{\underline{A}}$

O sea

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t)$$
$$x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t) \qquad (*)$$

La forma más general p/ x_1, x_2 q/ cumplan con $(*)$ es:

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T}\,\Pi_1(t)$$
$$x_2(t) = \mu_2^{t/T}\,\Pi_2(t)$$

donde $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ son periódicas

$$\Pi_1(t+T) = \Pi_1(t)$$

$$x_1(t+T) = \mu_1^{\frac{t+T}{T}}\,\Pi_1(t+T)$$
$$= \mu_1\,\mu_1^{t/T}\,\Pi_1(t)$$
$$= \mu_1\,x_1(t)$$

Plantemos:

$$x_2\left(\ddot{x}_1+\omega^2 x_1\right)=0$$

$$-\quad x_1\left(\ddot{x}_2+\omega^2 x_2\right)=0$$

$$x_2\ddot{x}_1-x_1\ddot{x}_2=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1 x_2-x_1\dot{x}_2\right)=0$$

$$\dot{x}_1 x_2-x_1\dot{x}_2=cte$$

$$x_1=\mu_1^{t/T}\Pi_1(t)$$

$$\dot{x}_1=\frac{\mu_1^{t/T}\log(\mu_1)}{T}\Pi_1(t)+\mu_1^{t/T}\dot{\Pi}_1(t)=$$

$$\dot{x}_1(t+T)=\mu_1\dot{x}_1(t)$$

$$\left(\dot{x}_1 x_2-x_1\dot{x}_2\right)(t+T)=\mu_1\mu_2\left(\dot{x}_1 x_2-x_1\dot{x}_2\right)(t)$$

$$\therefore\ \mu_1\mu_2=1$$

Además, los coef de la ec:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

son reales. Luego, si $x(t)$ es solución $\Rightarrow x^*(t)$ también lo es

Luego tenemos las siguientes posibilidades:

i) $\mu_1 = \mu_2^*$ (las raíces μ_1, μ_2 son complej conjugadas)

$$\mu_1 \mu_2 = \mu_1 \mu_1^* = 1 \Longrightarrow |\mu_1| = 1$$

ii) $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu_1 \mu_2 = 1 \Rightarrow$ $\mu_1 < 1$, $\mu_2 = 1/\mu_1 > 1$ Inestable

$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ $\quad \mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = -1$

En el caso inestable:

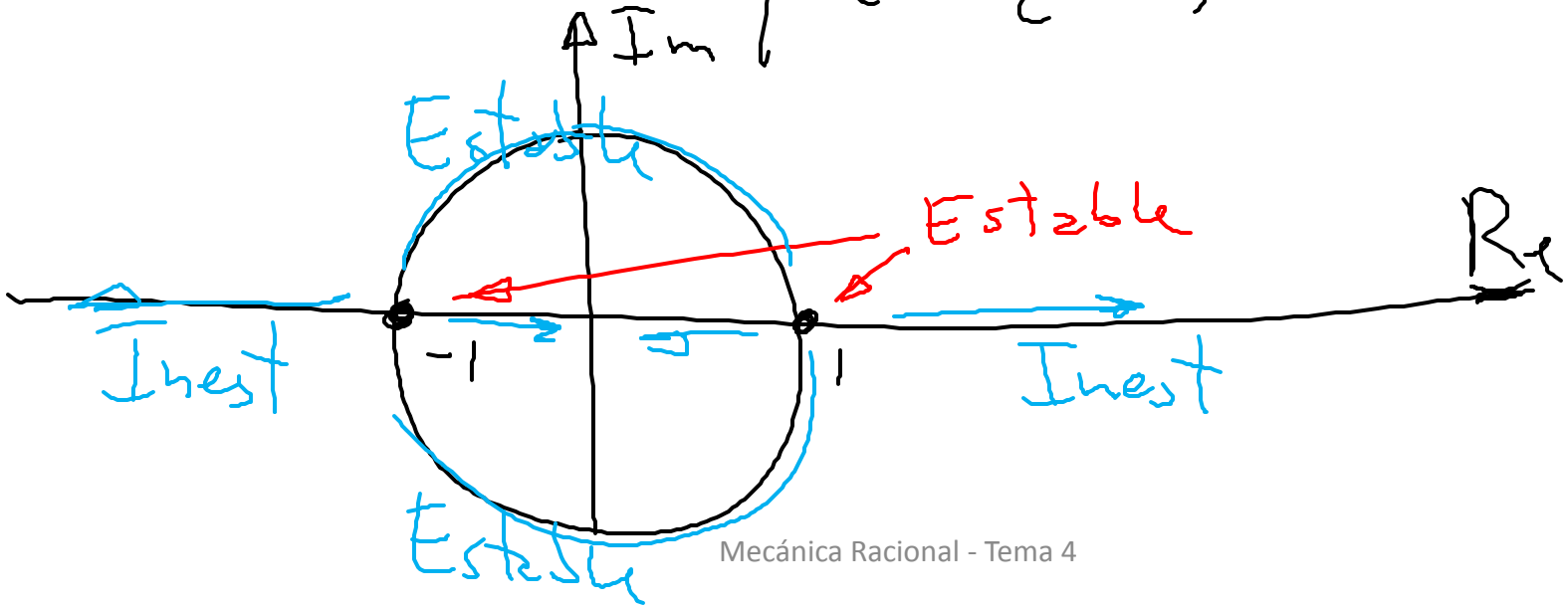
$$x_1(t) = \mu_1 \, \Pi_1(t)$$

$$x_1(t+nT) = \mu_1^n \, \Pi_1(t) \longrightarrow 0$$

$$x_2(t) = \mu_2 \, \Pi_2(t)$$

$$x_2(t+nT) = \mu_2^n \, \Pi_2(t) \longrightarrow \infty$$

RESONANCIA PARAMETRICA



Oscilaciones no lineales (o "anharmonic")

En la teoría de vibraciones de pequeña amplitud, nos basamos en retener el primer término de energía potencial y cinética. (términos cuadráticos)

$\Longrightarrow$ oscilaciones lineales

Si retenemos términos de > orden $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ oscilaciones no lineales.

Tienen un comportamiento cualitativo distinto.

Consideramos un Lagrangiano c/ términos orden 3.

U (grado 3 en x_i)

T ($\dot{x}_i \dot{x}_j$ x_k)

parte "lineal"

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k\right) + \sum_{i,k,l} \underline{n_{ikl}}\,\dot{x}_i\dot{x}_k x_l - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} \underline{l_{ikl}}\, x_i x_k x_l$$

Coef adic

Cambiando a coord normales:

NOLINEAL ACOPLADA

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\dot{Q}_\alpha - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right)}_{\text{lineal desacoplada}} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha\beta\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$$

Ecs de movimiento:

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, \underline{\ddot{Q}})$$

donde f_α son funciones homogéneas de grado 2 en las coord normales y sus derivadas temp.

Buscamos soluciones de la forma:

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)} \qquad Q_\alpha^{(2)} << Q_\alpha^{(1)}$$

$Q_\alpha^{(1)}$: solución del problema $\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0$

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha)$$

Nos queda p/ la perturbación:

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha\left(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, \ddot{\underline{Q}}\right) = (*)$$

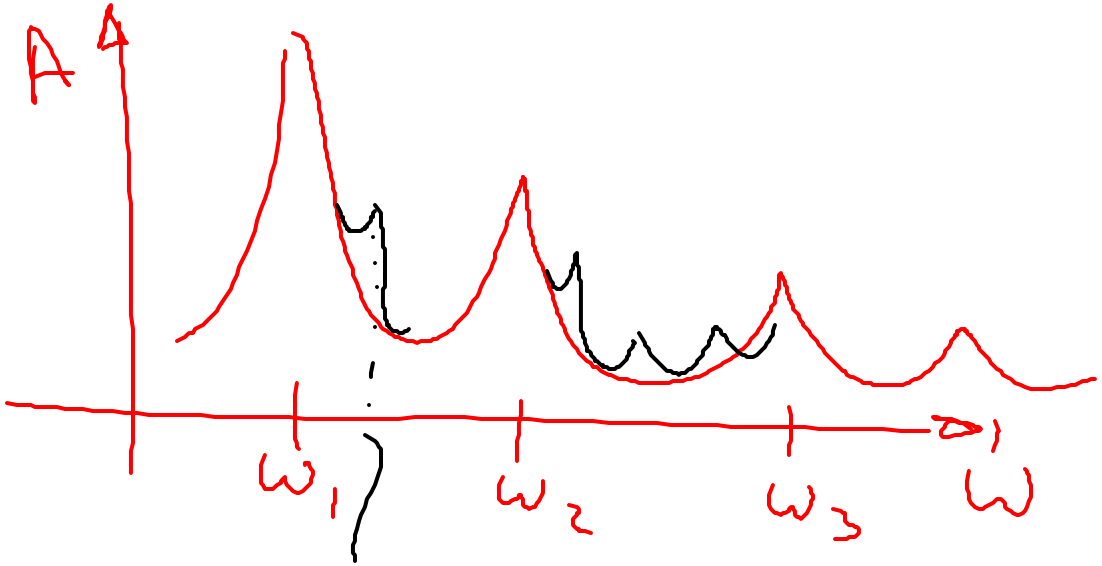
Aproximo el RHS retenido los términos de 2° orden

$$* = f_\alpha\left(\underline{Q}^{(1)}, \dot{\underline{Q}}^{(1)}, \ddot{\underline{Q}}^{(1)}\right)$$

Por ejemplo, en el lado derecho tenemos términos de la forma:

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \left\{ \cos\left((\omega_\alpha + \omega_\beta) t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta\right) + \cos\left((\omega_\alpha - \omega_\beta) t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta\right) \right\}$$



$\omega_i + \omega_j$

$\omega_i - \omega_j$

Aparecen también respuestas a $2\omega_\alpha$

Incluyendo términos de > orden en la energía, aparecen combinaciones de más frecuencias en la respuesta:

$$\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma \quad \ldots$$

<u>Ejemplo:</u>

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 - \frac{1}{3} m \alpha x^3 - \frac{1}{4} m \beta x^4$$

Ec de movimiento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3$$

Prop sol p/ aprox sucesivas:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$$

$$x^{(1)} = a \cos \omega t$$

donde $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} \ldots$

Reescribimos

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}$$

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} \qquad \omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)}$$

$$\underbrace{\omega_0^2\left[\frac{\ddot{x}^{(1)}}{\omega^2} + x^{(1)}\right]}_{0} + \cancel{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(2)}} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right)^2 -$$

$$- \beta\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right)^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(\ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)}\right)$$

$$-\ddot{x}^{(1)} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(1)} - \ddot{x}^{(2)} + \cancel{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(2)}}$$

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2(\omega t) + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos(\omega t)$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{2}\alpha a^2 \cos(2\omega t) + \cancel{+ 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos(\omega t)}$$

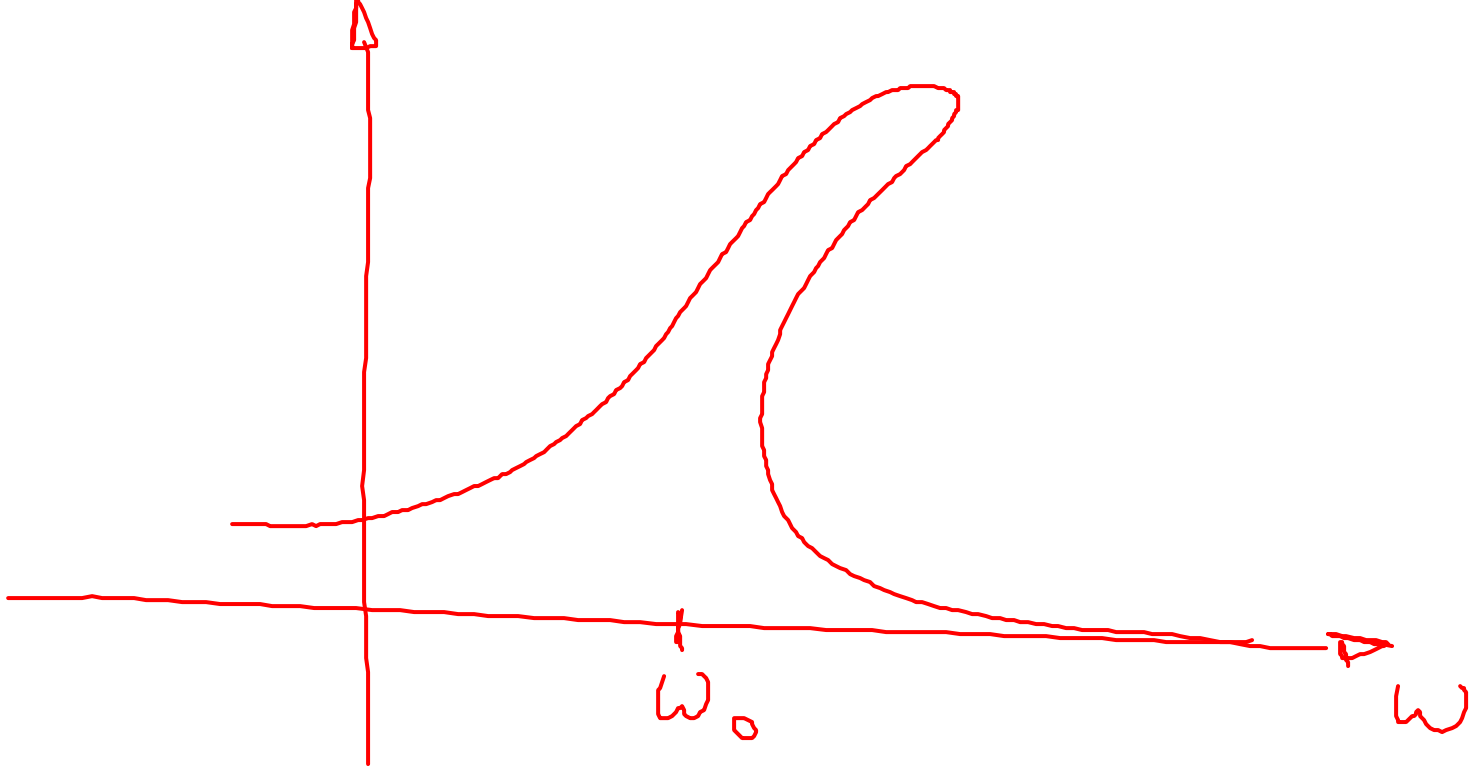
P/evitar presencia $\omega^{(1)} = 0$

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t$$

$\vdots$

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{1}{2}\beta\right)\cos 3\omega t$$

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2$$


ω_0
ω