

5 Sistemas de varios grados de libertad

5.1 Ecuación característica

Siempre dentro del campo de las oscilaciones de pequeña amplitud, consideraremos los sistemas de varios grados de libertad ($s > 1$).

La energía potencial del sistema es función de las coordenadas generalizadas, $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$, y tiene un mínimo para $q_i = q_{i0}$. Definimos entonces $x_i \cong q_i - q_{i0}$. Por estar en oscilaciones de pequeña amplitud podemos expandir U en función de x_i hasta los términos cuadráticos.

$$\therefore U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k \quad \text{donde } k_{ik} = k_{ki} \Rightarrow U \text{ es simétrica} \quad (148)$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \underline{x}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \neq 0 \Rightarrow U > 0 \Rightarrow \underline{k} \text{ es definida positiva} \quad (149)$$

La energía cinética será:

$$\therefore K = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \quad \text{definiendo } m_{ik} \cong a_{ik}(q_0) \therefore K = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \quad (150)$$

donde $m_{ik} = m_{ki}$

$$\therefore L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) \quad (151)$$

En virtud de la simetría de \underline{K} y de \underline{U} , podemos determinar el diferencial total de L :

$$\therefore dL = \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_k dx_i - k_{ik} x_k dx_i) \quad (152)$$

$$\text{donde } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k (m_{ik} \dot{x}_k) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k (k_{ik} x_k) \quad (153)$$

Las ecuaciones de Lagrange serán:

$$\therefore \sum_k (m_{ik} \ddot{x}_k) + \sum_k (k_{ik} x_k) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (154)$$

La (154) corresponde a un sistema de s ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Puede escribirse:

$$\therefore \sum_k (m_{ik} \ddot{x}_k + k_{ik} x_k) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (155)$$

La solución general será:

$$x_k = A_k e^{i\omega t} \Rightarrow x_k = -\omega^2 A_k e^{i\omega t}; x_k \text{ es un vector en } k \quad (156)$$

Reemplazando esta solución en (155):

$$\therefore \sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k e^{i\omega t} = 0 \quad (157)$$

La (157) es un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas. Usando notación matricial:

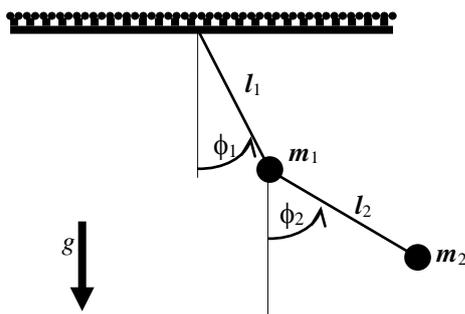
$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{A} = 0 \quad (158)$$

Para que exista solución no trivial deberá ser:

$$\boxed{\det(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) = 0} \quad \text{Ecuación característica} \quad (159)$$

La ecuación característica del sistema es un polinomio de grado s en ω^2 . En general tendrá s raíces reales positivas ω_α^2 , con $\alpha = 1, \dots, s$. Estas raíces son los autovalores o *frecuencias características o propias*. En algunos casos particulares, algunas raíces pueden coincidir, cuando existen algunas simetrías. Si algún ω_α^2 es negativo, será $\omega \in \mathbb{C}$, e indicará la presencia de un factor exponencial creciente o decreciente en algún $x_k(t)$ o $\dot{x}_k(t)$. Esta situación es inadmisibles, ya que indica que la energía total no es constante en el tiempo y por lo tanto no se conserva.

Ejemplo: Péndulo doble con vibraciones de pequeña amplitud



Será: $\phi_1 \wedge \phi_2 \ll 1$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2) + (m_1 - m_2)gl_1 \cos \phi_1 - m_2 gl_2 \cos \phi_2$$

La configuración de equilibrio estable corresponde a $\phi_1 = \phi_2 = 0$

Para hallar el potencial, derivamos el lagrangiano:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\phi}} = \left\{ \begin{matrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \phi_1 \\ m_2 gl_2 \sin \phi_2 \end{matrix} \right\}; \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{\phi}} = \left[\begin{matrix} (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & m_2 gl_2 \cos \phi_2 \end{matrix} \right]$$

Evaluando en $\phi = 0$:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 gl_2 \end{bmatrix}$$

Luego, la ecuación característica:

$$\det \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 - \omega^2 (m_1 + m_2)l_1^2 & -\omega^2 m_2 l_1 l_2 \\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2 gl_2 - \omega^2 m_2 l_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore (m_1 + m_2)(g - \omega^2 l_1)(g - \omega^2 l_2) - \omega^4 m_2 l_1 l_2 = 0$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)} \sqrt{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2} \right]$$

Si $m_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_{1,2} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{l_1}}$ y $\sqrt{\frac{g}{l_2}}$, correspondientes a las oscilaciones de dos péndulos independientes.

5.2 Modos propios y coordenadas normales

Para verificar que las raíces son reales, multiplicamos por el complejo conjugado:

$$\underline{A}^{*T} (-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}) \underline{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\underline{A}^{*T} \underline{K} \underline{A}}{\underline{A}^{*T} \underline{M} \underline{A}} \quad (160)$$

$$\therefore \left(\sum (k_{ik} A_i^* A_k) \right)^* = \sum (k_{ik} A_i A_k^*) = \underbrace{\sum (k_{ki} A_i A_k^*)}_{\text{por simetría}} = \sum (k_{ik} A_k A_i^*) \quad (161)$$

Por lo tanto, en (160) el numerador son reales y positivos porque \underline{K} y \underline{M} son definidas positivas. Luego, ω_α^2 es real positivo.

Reemplazando:

$$\sum_k (k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) \cdot \Delta_{k\alpha} = 0 \quad ; \quad \text{con } \Delta_{k\alpha} \neq 0 \quad (162)$$

Luego, un $C_\alpha \Delta_{k\alpha}$, con $C_\alpha \in \mathbb{C}$, también satisface la ecuación (162). Llamaremos a los $\Delta_{k\alpha}$ *modos propios*, correspondientes a las *frecuencias propias del sistema*.

$$\therefore x_k = \text{re} \left(C_\alpha \Delta_{k\alpha} e^{i\omega t} \right) \quad \text{es una solución particular.} \quad (163)$$

La solución general será:
$$x_k = re \sum_{\alpha=1}^s \left(C_{\alpha} \Delta_{k\alpha} e^{i\omega t} \right) \quad (164)$$

En la (162) son $k_{ik}, \omega_i, m_{ik}, \Delta_{ik} \in \mathbf{R}$. Por lo tanto:
$$x_k = \sum_{\alpha=1}^s (\Delta_{k\alpha} \Theta_{\alpha}) \quad (165)$$

Donde $\Theta_{\alpha} \triangleq re \left(C_{\alpha} e^{i\omega t} \right) \quad (166)$

Por lo tanto, para cada coordenada la respuesta será una combinación de s oscilaciones periódicas simples $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$ con amplitudes y fases arbitrarias pero frecuencias definidas. Las fases y amplitudes dependen de las condiciones iniciales.

La ecuación (165) puede verse como un sistema de s ecuaciones en la incógnita Θ_{α} . Podemos expresar una dependencia $\Theta_{\alpha} = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$, o bien, en forma matricial, $\underline{\Theta} = f(\underline{x})$. Esto permite ver a las $\underline{\Theta}$ como un sistema de coordenadas generalizadas para el problema original:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{K} \underline{x} = 0 \quad (167)$$

Puede entonces escribirse:
$$\underline{x} = \underline{\Delta} \underline{\Theta} \quad (168)$$

Por la definición (166) se ve que satisface la ecuación:

$$\ddot{\Theta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha} = 0 \quad \text{con } \alpha=1, \dots, s \quad (169)$$

Las Θ_{α} se denominan *coordenadas normales*. Entonces, la ecuación matricial (167) de la que partimos, en coordenadas normales se transforma en s ecuaciones ordinarias independientes, desacopladas (169). La aceleración en cada coordenada depende solamente de esa coordenada y las condiciones iniciales de esa misma coordenada. En coordenadas normales, el lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underbrace{m_{\alpha}}_{>0 \text{ cte}} (\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2) \quad (170)$$

Se ve que el lagrangiano en coordenadas normales es la suma de oscilaciones en una dimensión correspondientes a cada una de las frecuencias ω_{α} . Por lo tanto, la transformación (168) pone a la energía cinética y a la potencial en forma diagonal, ya que no existen términos cruzados.

Trabajando en forma matricial:

$$\underline{\underline{\Delta}}_{\beta}^T (\underline{\underline{K}} - \omega_{\alpha}^2 \underline{\underline{M}}) \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} = 0 \quad (171)$$

$$\underline{\underline{\Delta}}_{\beta}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} - \omega_{\alpha}^2 \underline{\underline{\Delta}}_{\beta}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} = 0 \quad (172)$$

$$\underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Delta}}_{\beta} - \omega_{\beta}^2 \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\beta} = 0 \quad (173)$$

$$\frac{\underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Delta}}_{\beta} - \omega_{\beta}^2 \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\beta}}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega_{\beta}^2) \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\beta}} = 0 \quad \text{restando m.a.m} \quad (174)$$

En la (174) podrían presentarse los siguientes casos:

(i) $\omega_{\alpha}^2 = \omega_{\beta}^2$

Pueden ser dos alternativas

a) $\alpha = \beta \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}}_{m_{\alpha}} > 0$

b) $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ no puede determinarse

(ii) $\omega_{\alpha}^2 \neq \omega_{\beta}^2 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\beta} = 0 \Rightarrow$ los $\underline{\underline{\Delta}}$ son M -ortogonales.

$$\therefore \underline{\underline{\Delta}}_{\beta}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} = \underbrace{\delta_{\beta\alpha} m_{\alpha}}_{\text{escalar}} \quad (175)$$

$$\therefore \text{en (172)} \quad \underline{\underline{\Delta}}_{\beta}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} = \omega_{\alpha}^2 \underline{\underline{\Delta}}_{\beta}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} = \omega_{\alpha}^2 m_{\alpha} \delta_{\beta\alpha} \quad (176)$$

\therefore los $\underline{\underline{\Delta}}$ son también K -ortogonales.

En las expresiones anteriores, m_{α} es la *masa generalizada en las coordenadas Θ* .

Usualmente, las coordenadas normales se eligen de manera de hacer las $m_{\alpha} = 1$. Si definimos nuevas coordenadas:

$$Q_{\alpha} = \sqrt{m_{\alpha}} \Theta_{\alpha} \quad (177)$$

El lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) \quad (178)$$

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{\Theta}} = \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha} \Theta_{\alpha} = \frac{\underline{\underline{\Delta}}_{\alpha}}{\sqrt{m_{\alpha}}} Q_{\alpha} = \bar{\underline{\underline{\Delta}}}_{\alpha} Q_{\alpha} \quad (179)$$

Evidentemente, para los modos normalizados será:

$$\underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\beta^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\alpha = \delta_{\beta\alpha} \quad (180)$$

$$\underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\beta^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\alpha = \omega_\alpha^2 \delta_{\beta\alpha} \quad (181)$$

$$\therefore \underbrace{\underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\beta^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\alpha}_{\underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\beta^{-1} \underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{I}} \quad (182)$$

De donde: $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\bar{\Delta}}}\underline{\underline{Q}} \Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\alpha^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{x}} \quad (183)$

Las condiciones iniciales serán:

$$\underline{\underline{Q}}_0 = \underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\alpha^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{x}}_0 \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{Q}}}_0 = \underline{\underline{\bar{\Delta}}}_\alpha^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\dot{x}}}_0 \quad (184)$$

$$\underline{\underline{\ddot{Q}}}_\alpha + \omega_\alpha^2 \underline{\underline{Q}}_\alpha = 0 \quad \text{con } \underline{\underline{Q}}_{\alpha 0}; \underline{\underline{\dot{Q}}}_{\alpha 0} \text{ dados} \quad (185)$$

Resolviendo el sistema en coordenadas normales (185), que son s ecuaciones independientes, desacopladas, el resultado se transforma al sistema de coordenadas original:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{\bar{\Delta}}}\underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{\dot{x}}} &= \underline{\underline{\bar{\Delta}}}\underline{\underline{\dot{Q}}} \end{aligned} \quad (186)$$

5.3 Oscilaciones forzadas

Las coordenadas normales permiten la reducción del problema en el caso de oscilaciones forzadas en sistemas de más de un grado de libertad, en series de oscilaciones de sistemas simples de 1 GL.

El lagrangiano del sistema, incluyendo las fuerzas variables externas, será:

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k \quad (187)$$

Donde:

L_0 : Lagrangiano del sistema libre.

$\sum_k F_k(t)x_k$: Términos forzantes

Reemplazando las coordenadas x_k por coordenadas normales (178):

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_k \underbrace{F_k(t) \bar{\Delta}_{k\alpha}}_{f_\alpha(t)} Q_\alpha \quad (188)$$

Las ecuaciones de movimiento serán:

$$\therefore \ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \quad (189)$$

El sistema continúa desacoplado, ya que cada ecuación (189) tiene una sola incógnita $Q_\alpha(t)$. Las $f_\alpha(t)$ son las proyecciones de las fuerzas sobre la base de modos normales:

$$f_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha^T \underline{F} \quad \text{o bien} \quad f_\alpha(t) = \sum_k \frac{F_k(t) \Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} \quad (190)$$

5.4 Procedimiento de cálculo

A partir del sistema $\underline{M} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{F}$, sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, acoplado, se procede:

(i) *Frecuencias propias*: Resolviendo el sistema:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{\Delta} = 0 \Rightarrow \omega_\alpha^2 \Rightarrow \underline{\Delta}_\alpha$$

(ii) *Normalización de los modos*

$$\underline{m} = \underline{\Delta}^T \underline{M} \underline{\Delta} \quad \text{donde } \underline{m} \text{ es una matriz diagonal}$$

$$\bar{\underline{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{m}}} \underline{\Delta} \quad \text{modos normales}$$

(iii) *Normalización de las condiciones iniciales y de las fuerzas excitadoras*

$$\underline{Q}_0 = \bar{\underline{\Delta}}^T \underline{M} \underline{x}_0$$

$$\underline{\dot{Q}}_0 = \bar{\underline{\Delta}}^T \underline{M} \dot{\underline{x}}_0$$

$$\underline{f}(t) = \bar{\underline{\Delta}}^T \underline{F}(t)$$

(iv) *Resolución de las ecuaciones de movimiento desacopladas (independientes)*

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \quad \text{para las condiciones iniciales } \underline{Q}_{0\alpha}; \underline{\dot{Q}}_{0\alpha}$$

(v) *Transformación de las soluciones en coordenadas normales a las coordenadas iniciales*

$$\underline{x}(t) = \bar{\underline{\Delta}} \underline{Q}(t)$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \bar{\underline{\Delta}} \dot{\underline{Q}}(t)$$

En general, el orden de las matrices será muy grande y nos dará una gran cantidad de frecuencias ω_α , muchas más de las que nos interesan o pueden tener importancia desde el punto de vista técnico.

Normalmente nos interesan sólo los modos correspondientes a las frecuencias más bajas, por lo que basta calcular una cantidad r de frecuencias, mucho menor que s .

5.5 Vibraciones amortiguadas

Hasta aquí se han considerado sistemas en el vacío, sin presencia de fricción. En realidad existe rozamiento con el medio, que produce disipación de la energía en forma de calor. Por lo tanto, el problema sale del dominio estricto de la mecánica pura, ya que aparecen problemas termodinámicos.

En este caso, no se puede asegurar que la aceleración sea sólo función de las coordenadas y de la velocidad en el instante considerado.

En la práctica existen casos donde el movimiento en el medio puede aproximarse incluyendo términos adicionales en las ecuaciones del movimiento. Tales casos comprenden aquellos de oscilaciones con frecuencias pequeñas comparadas con las frecuencias que dominan los procesos de disipación. Es decir, los tiempos característicos mecánicos y termodinámicos son muy distintos, siendo $T_{mec} \ll T_{term}$. En estas condiciones, podemos decir que el cuerpo está "actuado" por una "fuerza de fricción" que depende, para un medio homogéneo, sólo de su velocidad. Nos referimos en este caso a la denominada *disipación viscosa*.

Si esta velocidad es suficientemente pequeña, podemos expandir esta fuerza friccional en potencias de la velocidad y retener el primer término significativo.

El término de orden cero es nulo porque no existen fuerzas viscosas en ausencia de velocidad. Luego:

$$f_{FR} = -\alpha \dot{x} \quad \text{con } \alpha > 0 \quad (191)$$

El signo (-) de la (191) indica que la fuerza de fricción se opone a la dirección del movimiento. Añadimos esta fuerza a la ecuación del movimiento:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} \quad (192)$$

Dividiendo todo por m :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} \quad (193)$$

$\omega_0^2 \quad \doteq 2\lambda$

Donde: λ : *coeficiente de amortiguamiento*
 ω_0 : *frecuencia de oscilación libre*

Luego:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (194)$$

La solución de la (194) es:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \frac{ae^{(-\lambda(t+T))} \cos \omega((t+T) + \alpha)}{ae^{(-\lambda t)} \cos(\omega t + \alpha)} = e^{(-\lambda T)} \quad (202)$$

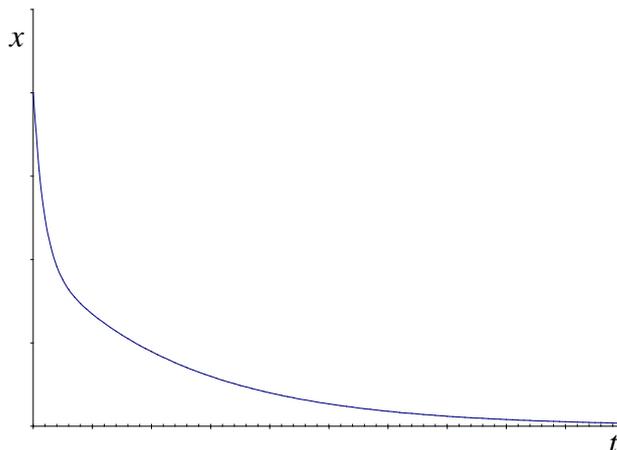
$$\therefore \lambda T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} \quad \text{decremento logarítmico} \quad (203)$$

La expresión (203) permite medir el amortiguamiento en forma experimental.

b) Amortiguamiento hipercrítico: $\lambda > \omega_0 \Rightarrow r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ son dos raíces reales negativas

$$x(t) = C_1 e^{\left[-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t\right]} + C_2 e^{\left[-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t\right]} \quad (204)$$

La gráfica del movimiento tiene la forma:



c) Amortiguamiento crítico: $\lambda = \omega_0 \Rightarrow r_{1,2} = -\lambda$ son dos raíces reales negativas iguales

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) e^{(-\lambda t)} \quad (205)$$

El movimiento sigue una curva similar a la anterior, tendiendo más rápidamente a cero.

En general es conveniente definir $\xi \triangleq \frac{\lambda}{\omega_0}$ como la *relación de amortiguamiento crítico* o bien, expresada en porcentaje, como *porcentaje de amortiguamiento*

crítico. La ecuación del movimiento se expresa entonces de una manera más conveniente como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (206)$$

5.6 Vibraciones amortiguadas en sistemas de varios grados de libertad

Las fuerzas friccionales generalizadas correspondientes a las coordenadas x_i pueden escribirse como:

$$f_{FR,i} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k \quad (207)$$

A partir de argumentos puramente mecánicos no podemos asegurar nada acerca de los α_{ik} con respecto a los subíndices i y k . Por métodos de física estadística y argumentos termodinámicos puede demostrarse que existe simetría, por lo que $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. La expresión (207) puede entonces escribirse:

$$f_{FR,i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (208)$$

La expresión (208) son las derivadas de una forma cuadrática:

$$F = \frac{1}{2} \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \quad (209)$$

Donde F es la *función de disipación* o el *potencial de disipación de Rayleigh*¹. Las fuerzas así obtenidas se agregan a las ecuaciones de Lagrange, quedando:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right)}_{\substack{\text{lagrangiano} \\ \text{del} \\ \text{sistema libre}}} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (210)$$

El último término de la expresión (210) no se deriva respecto del tiempo por que se trata de fuerzas no conservativas. La función de disipación tiene un significado físico importante, ya que representa la *tasa de disipación de energía del sistema*. Esto se ve derivando la energía mecánica del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \cancel{\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} - \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\dot{x}_i}{dt}} \\ \therefore \frac{dE}{dt} &= \sum \dot{x}_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = \sum \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \end{aligned} \quad (211)$$

¹ Se trata en realidad de un pseudo potencial.

Como F es una función homogénea cuadrática en las velocidades, de acuerdo con el teorema de Euler:

$$\frac{dE}{dt} = -2F \quad (212)$$

Dado que los procesos disipativos implican pérdida de energía, debe ser entonces $F > 0$, por lo que la forma cuadrática (209) debe ser definida positiva.

Las ecuaciones del movimiento para pequeñas oscilaciones pueden ser obtenidas agregando las fuerzas de fricción al miembro derecho de la (154):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k \quad (213)$$

Reemplazando con soluciones de la forma $x_k = A_k e^{(rt)}$ se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) A_k = 0 \quad (214)$$

Para que exista solución no trivial, es decir, con $A_k \neq 0$, deberá ser:

$$\boxed{\det(m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) = 0} \quad \text{ecuación característica} \quad (215)$$

Las raíces r de esta ecuación de grado $2s$ pueden ser reales negativas o complejos conjugados de parte real negativa, ya que de otra manera las velocidades, coordenadas y energías tenderán a aumentar con el tiempo, mientras que la disipación de energía implica que estas disminuyan.

En general es complicado determinar los α_{ik} . Además, en general las fuerzas de fricción son mucho menores que las elásticas y las de inercia, por lo que el problema puede aproximarse a $\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}$. Es decir, se trabaja con los modos de vibración no amortiguados y se asume que $\underline{\underline{C}}$ diagonaliza en esta base, quedando las ecuaciones desacopladas en las correspondientes a sistemas de 1 GL amortiguados:

$$\boxed{\ddot{x}_i + 2\xi \omega_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0} \quad \text{con } i=1,s \quad (216)$$

Con respecto a ξ , podría excitarse el sistema en un modo determinado y calcularlo a partir del decremento logarítmico, o bien, adoptarlo según la experiencia.

5.7 Vibraciones amortiguadas forzadas

En este caso, el sistema sufre una fuerza externa. Para una excitación armónica, la ecuación del movimiento toma la forma:

$$x + 2\lambda x + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\gamma t) \quad (217)$$

La misma puede escribirse en forma compleja:

$$x + 2\lambda x + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t} \quad (218)$$

La solución particular será:

$$x = B e^{i\gamma t} \quad (219)$$

$$x = i\gamma B e^{i\gamma t} \quad \text{multiplicando por } 2\lambda \quad (220)$$

$$x = -\gamma^2 B e^{i\gamma t} \quad \text{multiplicando por } \omega_0^2 \quad (221)$$

$$\frac{f}{m} = B(-\gamma^2 + 2\lambda\gamma i + \omega_0^2) \quad \text{sumando m.a.m} \quad (222)$$

$$\therefore B = \frac{f}{m(-\gamma^2 + 2\lambda\gamma i + \omega_0^2)} = b e^{i\delta} \quad (223)$$

$$\therefore b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \quad ; \tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (224)$$

Luego:
$$x = \operatorname{re}\left(B e^{i\gamma t}\right) = \operatorname{re}\left(b e^{i(\gamma t + \delta)}\right) \quad (225)$$

La solución particular quedará entonces $x = b \cos(\gamma t + \delta)$ y la solución general será:

$$x(t) = a e^{(-\lambda t)} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta) \quad (226)$$

El primer término de la (226) corresponde a la respuesta de las oscilaciones libres, y tiende a cero cuanto $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, para valores de t lo suficientemente altos, puede escribirse:

$$x(t) = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \cos(\gamma t + \delta) \quad (227)$$

En estas expresiones, δ es una diferencia de fase entre la excitación y la respuesta. Esto indica que la respuesta está atrasada con respecto a la excitación.