Producto tensorial entre tensores

- Se define el **producto tensorial** entre los tensores $\mathbf{S} \in \mathrm{CT}(m)$ y $\mathbf{T} \in \mathrm{CT}(n)$ como el tensor $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} \in \mathrm{CT}(n+m)$:

$$\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} = S_{i_1 \dots i_m} T_{j_1 \dots j_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}$$

Ver Ej 5 Guía 1

Contracción

Contracción: Sean $T_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}$ componentes de un CT(n). Hacemos $i_p = i_q$ y sumamos sobre i_p de 1 a 3. Estos índices se dicen **contraídos** y el orden del tensor se reduce en dos.

1. $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ contrae en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
2. $\mathbf{T} \in$ CT(2) contrae en el escalar $T_{ii} = \operatorname{tr} \mathbf{T}$ (traza de $\mathbf{T}$), invariante escalar de $\mathbf{T}$ pues

$$T'_{ii} = Q_{ip} Q_{iq} T_{pq} = \delta_{pq} T_{pq} = T_{pp}$$

3. Dados $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in$ CT(2), el producto tensorial $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} \in$ CT(4) de componentes $[\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}]_{ijkl} = S_{ij} T_{kl}$ contrae de diversas maneras, por ejemplo:

   $j = k$: $S_{ij} T_{jl} = [\mathbf{ST}]_{il}$, donde $\mathbf{ST} \in$ CT(2) es el producto interno entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$, que contrae a su vez en el escalar $\operatorname{tr}(\mathbf{ST}) = S_{ij} T_{ji}$,

   $j = l$: $S_{ij} T_{kj} = [\mathbf{ST}^T]_{ik}$, donde $\mathbf{ST}^T \in$ CT(2) es el producto interno entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}^T$, que contrae a su vez en el escalar $\operatorname{tr}(\mathbf{ST}^T) = S_{ij} T_{ij} \equiv \mathbf{S} : \mathbf{T}$

4. $\mathbf{TT} = \mathbf{T}^2$, $\mathbf{TT}^2 = \mathbf{T}^3$, $\ldots$, $\mathbf{TT}^{(n-1)} = \mathbf{T}^n$ (n entero) contraen en $\operatorname{tr}(\mathbf{T}^2)$, $\operatorname{tr}(\mathbf{T}^3)$, $\ldots$, $\operatorname{tr}(\mathbf{T}^n)$, invariantes escalares de $\mathbf{T}$

Tensores isotrópicos

Tensor isotrópico: aquél cuyas componentes **no** cambian por cambios de base (ortogonal propia) arbitrarios.

CT(0): Todos los escalares son isotrópicos.

CT(1): No existen vectores isotrópicos no triviales.

CT(2): Los únicos tensores isotrópicos son $\alpha \mathbf{I}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

CT(3): Los únicos tensores isotrópicos son aquéllos de componentes $\alpha \varepsilon_{ijk}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

CT(4): Los únicos tensores $\mathbf{T} \in \mathrm{CT}(4)$ isotrópicos tienen componentes $T_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

CT(>4): Sus componentes se expresan como combinaciones lineales de productos de deltas de Krönecker y símbolos de permutación.

Isotropía en CT(1)

- Supongamos que el vector **v** es isotrópico, entonces

$$Q_{ij}v_j = v_i, \qquad \text{o} \qquad \mathrm{Qv} = \mathrm{v},\ \forall \mathrm{Q} \text{ ortogonal propia}$$

Elegimos:

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Ver Hoja 4

(rotación $\pi/2$ en torno a $\mathbf{e}_3$), tenemos $v_1 = v_2 = 0$.

- Similarmente, tomando rotación $\pi/2$ en torno a $\mathbf{e}_1$ o $\mathbf{e}_2$, vemos que $v_3 = 0$.

$\Rightarrow$ Sólo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ es isotrópico.

Isotropía en CT(2)

- Sea **T** un CT(2) isotrópico:

$$Q_{ip}Q_{jq}T_{pq} = T_{ij}, \quad \text{o} \quad \mathrm{QTQ}^T = \mathrm{T}, \ \forall \mathrm{Q} \text{ ortogonal propia} \tag{26}$$

Para Q dada por (25), tenemos :

$$\begin{bmatrix} T_{22} & -T_{21} & T_{23} \\ -T_{12} & T_{11} & -T_{13} \\ T_{32} & -T_{31} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{22} = T_{11}, \ T_{12} = -T_{21}, \ T_{23} = T_{32} = T_{13} = T_{31} = 0$$

QTQ^T

Isotropía en CT(2)

La elección

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(rotación $\pi/2$ alrededor de $\mathbf{e}_1$) da $T_{12} = T_{21} = 0$ y $T_{33} = T_{11}$, de forma que

$$T_{ij} = T_{11}\delta_{ij}$$

Como (26) vale para $\alpha\mathrm{T}$, con α escalar arbitrario, necesariamente **T** es múltiplo de **I**.

Isotropía en CT(3)

- Se demuestra que todo múltiplo del tensor CT(3) de componentes ε_{ijk} es isotrópico:

$$\varepsilon'_{ijk} \equiv \underbrace{Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}\varepsilon_{pqr} = (\det \mathrm{Q})\varepsilon_{ijk}}_{\text{Ej 1 (2) Guia 1}} = \varepsilon_{ijk}, \quad \forall \mathrm{Q} \text{ ortogonal propia}$$

Tensores de segundo orden como mapeo lineal

- Revemos ahora la teoría en forma invariante, i.e., sin recurrir a la definición de una base.
- **Tensores de segundo orden como mapeo lineal:** el tensor de 2º orden $\mathbf{T}$ es el mapeo lineal $\mathbf{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, o:

$$\mathbf{T} : \mathbf{u} \to \mathbf{Tu} \qquad \text{con } \mathbf{Tu} \in \mathbb{E} \; \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}$$

Linealidad implica

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{Tu} + \beta\mathbf{Tv}, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Los tensores de 2º orden pertenecen al conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ de todos los mapeos lineales de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$, que es un **espacio vectorial**.

Producto interno entre tensores de 2º orden

W

- Se define el **producto interno $\mathbf{ST}$** como

$$(\mathbf{ST})\mathbf{u} = \mathbf{S}(\underbrace{\mathbf{Tu}}_{v}), \qquad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$$ Ver Hoja 5

  En componentes cartesianas, $[\mathbf{ST}]_{ij} = S_{ik} T_{kj}$, que es una contracción de $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$.

- Los tensores **cero $\mathit{0}$** y **unitario** o **identidad $\mathbf{I}$** de 2º orden satisfacen

$$\mathit{0}\mathbf{u} = \mathbf{o}, \qquad \mathbf{Iu} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}$$

Tensores de segundo orden como mapeo bilineal

- **Tensores de segundo orden como mapeo bilineal:** el tensor de 2º orden $\mathbf{T}$ es la función bilineal $\mathbf{T} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v})$$

- Podemos decir $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ es el espacio vectorial de todas las funciones bilineales de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ en $\mathbb{R}$.
- Podemos decir indistintamente $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ o $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ (ambos espacios son isomorfos).

Dada una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ para $\mathbb{E}$

hoja 6

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \underline{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{v}} = \mathbf{u} \cdot \underline{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_i}$$
$$= \mathbf{u} \cdot v_j \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) v_j = u_i v_j = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij}$$

Para $\mathbf{T}$ arbitrario,

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{T}(u_i \mathbf{e}_i, v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ son arbitrarios,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \textbf{(representación de } \mathbf{T} \textbf{ en la base } \{\mathbf{e}_i\}\textbf{)}$$

Luego, por (24),

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = T_{ij} \qquad \textbf{(componente de } \mathbf{T} \textbf{ relativa a la base } \{\mathbf{e}_i\}\textbf{)}$$

Tensor transpuesto

- Definimos el **tensor transpuesto** $\mathbf{T}^T$ t.q.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$$

$$T^T(u,v) = T(v,u)$$

- En componentes cartesianas:

$$u_i [\mathbf{T}^T]_{ij} v_j = v_j T_{ji} u_i \qquad \forall u_i, v_j$$
$$\Rightarrow T^T_{ij} \equiv [\mathbf{T}^T]_{ij} = T_{ji}$$

$$T^T(e_i, e_j) = T(e_j, e_i)$$
$$T^T_{ij} = T_{ji}$$

Tensor simétrico de 2º orden

Un tensor de segundo orden $\mathbf{S}$ es **simétrico** si $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$. En componentes cartesianas, $S_{ij} = S_{ji}$.

Ejemplo

El tensor identidad de 2º orden $\mathbf{I}$ *es simétrico, pues*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, &\qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}\mathbf{u} &\qquad \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{I}^T \end{aligned}$$

Tensor antisimétrico de 2º orden

Un tensor de segundo orden $\mathbf{W}$ es **antisimétrico (o skew)** si $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$. En componentes cartesianas, $W_{ij} = -W_{ji}$.

- El vector $\mathbf{w}$ de componentes cartesianas $w_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{kj}$ es llamado **vector axial** de $\mathbf{W}$

Ejercicio

Mostrar:

1. $\varepsilon_{ipq} w_i = W_{qp}$
2. $\mathbf{w} \times \mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}$

Tensores simétricos y antisimétricos de 2º orden

Ver hoja 7

- Un tensor simétrico de 2º orden tiene 6 componentes independientes.
- Un tensor antisimétrico de 2º orden tiene 3 componentes independientes. Ver hoja 8
- Un tensor arbitrario puede escribirse como suma de uno simétrico y uno antisimétrico:

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T\right)}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T\right)}_{\text{antisimétrico}}$$

Determinante de tensores de 2º orden

- Definimos el **determinante** de **T** como el $\det \mathrm{T}$ (siendo T la matriz de componentes de **T** en una base ortonormal):

$$\det \mathbf{T} = \varepsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3}$$

Siendo $\mathrm{T}' = \mathrm{Q}\mathrm{T}\mathrm{Q}^T$, resulta:

$$\det \mathrm{T}' = \underbrace{\det \mathrm{Q}}_{1} \det \mathrm{T} \underbrace{\det \mathrm{Q}}_{1}{}^T = \det \mathrm{T}$$

$\Rightarrow$ det **T** es un invariante escalar de **T**

Inversa de un tensor de 2º orden

- Si $\det \mathbf{T} \neq 0$, existe un único **tensor inverso** $\mathbf{T}^{-1}$ t.q.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} \\ \det(\mathbf{T}^{-1}) &= (\det \mathbf{T})^{-1} \\ (\mathbf{S}\mathbf{T})^{-1} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1} \qquad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}) \end{aligned} \tag{27}$$

- Se define el **tensor adjunto** de $\mathbf{T}$:

$$\mathrm{adj}\, \mathbf{T} = (\det \mathbf{T})\mathbf{T}^{-T} \qquad \text{con } \mathbf{T}^{-T} = (\mathbf{T}^{T})^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^{T}$$

Autovectores y autovalores de un tensor de 2º orden

- **Autovectores de un tensor de 2º orden**: dado $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ es **autovector** de $\mathbf{T}$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow (T - \lambda I)v = 0 \tag{28}$$

λ: **autovalor** de $\mathbf{T}$ correspondiente a $\mathbf{v}$

- Las ecuaciones (28) tienen solución no trivial $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ si

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \qquad \textbf{(ecuación característica para T)} \tag{29}$$

Invariantes principales de un tensor de 2º orden

- La expansión de $(-1)\times(29)$ da:

$$-\det(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}) = -\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{32} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - I_1(\mathbf{T})\lambda^2 + I_2(\mathbf{T})\lambda - I_3(\mathbf{T}) = 0 \qquad (30)$$

donde I_i son los **invariantes principales de T**:

$$I_1(\mathbf{T}) = \operatorname{tr}\mathbf{T}$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{T})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{T}^2\right]$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \det\mathbf{T} = \frac{1}{6}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{T})^3 - 3\operatorname{tr}\mathbf{T}\operatorname{tr}\mathbf{T}^2 + 2\operatorname{tr}\mathbf{T}^3\right]$$

- Para cada solución real de (30) tenemos un autovector **v** real

Teorema de Cayley-Hamilton

$T v = \lambda v$

$T T v = \lambda T v = \lambda^2 v$

Aplicando $\mathbf{T}$ a (28) $r-1$ veces, tenemos

$$\mathbf{T}^r \mathbf{v} = \lambda^r \mathbf{v} \qquad (31)$$

Multiplicando (30) por $\mathbf{v}$ y usando (31):

$$\lambda^3 \mathbf{v} - I_1(\mathbf{T})\lambda^2 \mathbf{v} + I_2(\mathbf{T})\lambda \mathbf{v} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{o}$$
$$\left[\mathbf{T}^3 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T}^2 + I_2(\mathbf{T})\mathbf{T} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{I}\right] \mathbf{v} = \mathbf{o}$$

Siendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, resulta:

$$\mathbf{T}^3 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T}^2 + I_2(\mathbf{T})\mathbf{T} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathit{0} \qquad (32)$$

- **Teorema de Cayley-Hamilton:** todo tensor de 2º orden satisface su propia ecuación característica

Ejercicio

Si $\det \mathbf{T} \neq 0$ *mostrar:*

$$\det(\mathbf{T}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) = 0$$

y luego:

$$\lambda^{-3} - I_1(\mathbf{T}^{-1})\lambda^{-2} + I_2(\mathbf{T}^{-1})\lambda^{-1} - I_3(\mathbf{T}^{-1}) = 0$$

con:

$$I_1(\mathbf{T}^{-1}) = I_1(\mathbf{T})/I_3(\mathbf{T})$$
$$I_2(\mathbf{T}^{-1}) = I_2(\mathbf{T})/I_3(\mathbf{T})$$
$$I_3(\mathbf{T}^{-1}) = 1/I_3(\mathbf{T})$$

Ejercicio

Mostrar

$$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{T}^2 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T} + I_2(\mathbf{T})\mathbf{I})/I_3(\mathbf{T})$$

y deducir que $\mathbf{T}^r$ *puede expresarse en términos de* $\mathbf{I}, \mathbf{T}$, *y* $\mathbf{T}^2$, *con coeficientes invariantes de* $\mathbf{T}$, *para* r *entero positivo o negativo.*

Autovalores y autovectores para tensores simétricos

Sean λ_i y $\mathbf{v}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, autovalores y autovectores de $\mathbf{T}$. Luego:

$$\mathbf{T}\mathbf{v}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} \qquad \text{(no suma en } i\text{)}$$

de donde:

$$\mathbf{v}^{(j)} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}^{(i)}) = \lambda_i \mathbf{v}^{(j)} \cdot \mathbf{v}^{(i)} \tag{33}$$

$$\mathbf{v}^{(i)} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}^{(j)}) = \mathbf{v}^{(j)} \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{v}^{(i)}) = \lambda_j \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)} \tag{34}$$

Si $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, la diferencia (33)−(34) da:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)} = 0 \tag{35}$$

Autovalores y autovectores para tensores simétricos

- De (35), resulta
  1. Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$:
  $$\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)} = 0 \quad \Rightarrow v^{(i)} \perp v^{(j)} \tag{36}$$
  2. Si $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$, $i \neq j \neq k \neq i$:
  $$\mathbf{v}^{(i)} \perp \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(j)} \perp \mathbf{v}^{(k)} = 0$$
  Ver hoja 9

     Pueden elegirse vectores $\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)}$ arbitrarios, normales a $\mathbf{v}^{(k)}$ y normales entre sí.
  3. Si $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$, $i \neq j \neq k \neq i$, pueden elegirse vectores $\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}^{(k)}$ (arbitrarios) mutuamente ortogonales.
- En todo caso, los autovectores de $\mathbf{T}$ simétrico son **mutuamente ortogonales**

$$T(\alpha v) = \lambda \alpha v$$

Autovalores para tensores simétricos

Probaremos que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ por el absurdo:

- Si $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisface la ecuación característica, también lo hace su conjugado $\overline{\lambda}_i \in \mathbb{C}$
- Si $\mathbf{v}^{(i)}$ es el autovector correspondiente a λ_i, su conjugado $\overline{\mathbf{v}}^{(i)}$ es el autovector correspondiente a $\overline{\lambda}_i$
- Luego:

$$\underbrace{(\lambda_i - \overline{\lambda}_i)}_{\neq 0} \underbrace{\mathbf{v}^{(i)} \cdot \overline{\mathbf{v}}^{(i)}}_{=|\mathbf{v}^{(i)}|^2 > 0} \neq 0$$

$\implies$ Imposible verificar (35) $\implies$ los autovalores de $\mathbf{T}$ simétrico deben ser reales

Representación espectral de tensores

- Sean $\mathbf{v}^{(i)}$ autovectores de $\mathbf{T}$ normalizados (i.e., $|\mathbf{v}^{(i)}| = 1$) t.q.

$$\mathbf{I} = \sum_i \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)} \qquad \text{(suma sobre } i\text{)}$$

$I = e_i \otimes e_i$

Llegamos a la **representación espectral de T**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{I} = \sum_i (\mathbf{T}\mathbf{v}^{(i)}) \otimes \mathbf{v}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)}$$

Ver hoja 10

- La matriz de componentes T' en la base $\{\mathbf{v}^{(i)}\}$ es diagonal, con componentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- En la base $\{\mathbf{e}_i\}$, la matriz de componentes T:

$$\mathrm{T} = \mathrm{Q}^T \mathrm{T}' \mathrm{Q}$$

Ver hoja 11

con $Q_{ij} = \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{e}_j$

Representación espectral de tensores

$$T = \lambda_1 (v^{(1)} \otimes v^{(1)} + v^{(2)} \otimes v^{(2)} + v^{(3)} \otimes v^{(3)}) +$$
$$+ \lambda_3 v^{(3)} \otimes v^{(3)} - \lambda_1 v^{(3)} \otimes v^{(3)}$$

- Si $\lambda_2 = \lambda_1$:
$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{I} + (\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{v}^{(3)} \otimes \mathbf{v}^{(3)}$$
- Si $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$:
$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{I}$$
- **Autovectores de T** $\equiv$ **ejes principales** de **T**
  - Dos tensores de 2º orden **T** y **S** con los mismos ejes principales se dicen **coaxiales**
- **Autovalores de T** $\equiv$ **valores principales** de **T**

Ejercicio

Mostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son valores principales de $\mathbf{T}$, los invariantes principales resultan

$$I_1(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$I_2(\mathbf{T}) = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2$$
$$I_3(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Ejercicio

Mostrar que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son coaxiales si $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$.

Tensores definidos/semidefinidos positivos

- Un tensor $\mathbf{T}$ de 2º orden se dice **definido positivo** si $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) > 0 \; \forall \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \; \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$
- Un tensor $\mathbf{T}$ de 2º orden se dice **semidefinido positivo** si $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) \geq 0 \; \forall \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \; \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, con al menos un $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ para el que valga la igualdad
- Si $\mathbf{T}$ es simétrico y definido positivo, luego $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$
- Si $\mathbf{T}$ es simétrico y semidefinido positivo, luego $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$, con algún $\lambda_i = 0$

- Definimos la **raíz positiva** de $\mathbf{T}$ como

$$U = \mathbf{T}^{1/2} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{1/2} \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)} \qquad UU = U^2 = T$$

- Si $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, la **inversa** de $\mathbf{T}$ existe y su representación espectral es:

$$\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-1} \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)}$$

- Notar que $\mathbf{T}^{1/2}$ y $\mathbf{T}^{-1}$ son coaxiales con $\mathbf{T}$

Tensores antisimétricos de 2º orden

- Sea $\mathbf{W}$ antisimétrico de 2º orden:

$$\mathbf{W}^T = -\mathbf{W} \tag{37}$$

Sus invariantes principales resultan

$W^2_{ij} = W_{ik}W_{kj}$

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{W}) &= \operatorname{tr}\mathbf{W} = 0 \\ I_2(\mathbf{W}) &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{W})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{W}^2\right] = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{W}^2 = -\frac{1}{2}W^2_{ii} \\ &= -\frac{1}{2}W_{ij}W_{ji} = \frac{1}{2}W_{ij}W_{ij} = W_{12}^2 + W_{23}^2 + W_{31}^2 \\ I_3(\mathbf{W}) &= \det\mathbf{W} = 0 \end{aligned}$$

Ver hoja 12

- La ecuación característica resulta:

≥ 0

$$\lambda^3 + I_2(\mathbf{W})\lambda = \left[\lambda^2 + I_2(\mathbf{W})\right]\lambda = 0$$

Como $I_2(\mathbf{W}) > 0 \; \forall \mathbf{W} \neq \mathit{0}$, $\mathbf{W}$ tiene un único autovalor real $\lambda = 0$, al que corresponde el autovector $\mathbf{a}$ t.q.

$$\mathbf{Wa} = \mathbf{o}$$

- Si $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{kj} \mathbf{e}_i$ es **vector axial** de $\mathbf{W}$:

autovector

axial

$$\mathbf{Wa} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

$\Rightarrow \mathbf{a} = \alpha \mathbf{w}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, es el único autovector real de $\mathbf{W}$

Ejercicio

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *y* $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ *una base ortonormal, con* $\mathbf{w}$ *vector axial de* $\mathbf{W}$*. Mostrar:*

$$\mathbf{W} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}\mathbf{u})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

Deducir además que

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}\mathbf{u}) \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes (\mathbf{W}\mathbf{u})$$

Tensores ortogonales de 2º orden

- En general, el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ no se conserva bajo la transformación lineal $\mathbf{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, i.e.:

$$(\mathbf{Tu}) \cdot (\mathbf{Tv}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{Tv}) \neq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{en general}$$

- Se denomina **tensor ortogonal Q** a aquél que conserva el producto escalar:

$$\underline{(\mathbf{Qu}) \cdot (\mathbf{Qv}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{Qv})} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Ver hoja 13

de donde

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \tag{38}$$

- **Q** será propio o impropio según

$$\det \mathbf{Q} = \begin{cases} 1 & \textbf{tensor ortogonal propio} \\ -1 & \textbf{tensor ortogonal impropio} \end{cases}$$

Tensores ortogonales de 2º orden

De (38):

$\det(Q - I)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T &= \mathbf{I} - \mathbf{Q}^T \\
\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) &= -(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) \\
\det(\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{I})) &= -\det(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) \\
1 \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) + \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) &= 0 \\
\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) &= 0
\end{aligned}
$$

$\lambda = 1$

$\Rightarrow \lambda = 1$ es autovalor, al que corresponde el autovector $\mathbf{u}$ t.q.

$$\mathbf{Qu} = 1\mathbf{u}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ no se modifica por aplicación de $\mathbf{Q}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ es **eje de rotación**