

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 6

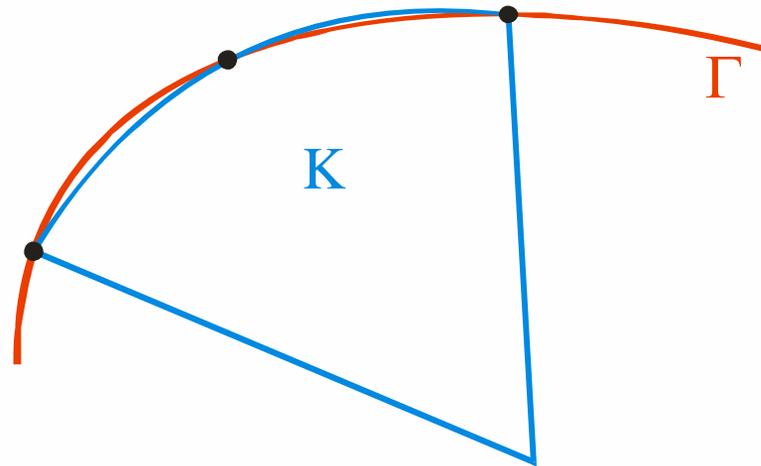
Elementos curvos e integración numérica.
Elementos infinitos.

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Elementos curvos

- Hasta aquí se han usado aproximaciones lineales por trozos de la frontera Γ .
- En 2D, se aproximó Γ con una línea poligonal, con un error de orden $O(h^2)$.
- Aproximaremos Γ con curvas descritas por polinomios de grado $k \geq 2$, con error $O(h^{k+1})$.
- En una malla de Ω , los elementos adyacentes a Γ tendrán un lado curvo.



Elementos curvos

Un elemento “curvo” se obtiene de la siguiente manera:

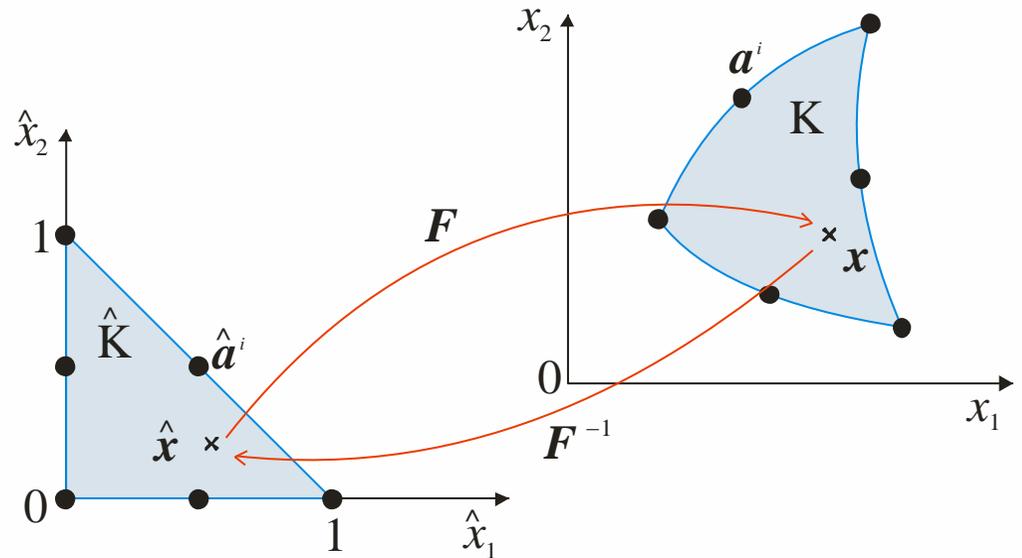
1. Supongamos el elemento $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \hat{\Sigma})$.
 - $\hat{\Sigma}$ es un conj. de gdl de tipo Lagrangiano (i.e., valores de la función en ciertos puntos $\hat{a}^i \in \hat{K}$, $i = 1, 2, \dots, m$)
2. Sea $F : \hat{K} \rightarrow K$ un mapeo 1-a-1, con inversa $F^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$.

3. Definimos

$$P_K = \{ p : p(\mathbf{x}) = \hat{p}(F^{-1}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in K, \hat{p} \in P_{\hat{K}} \}$$

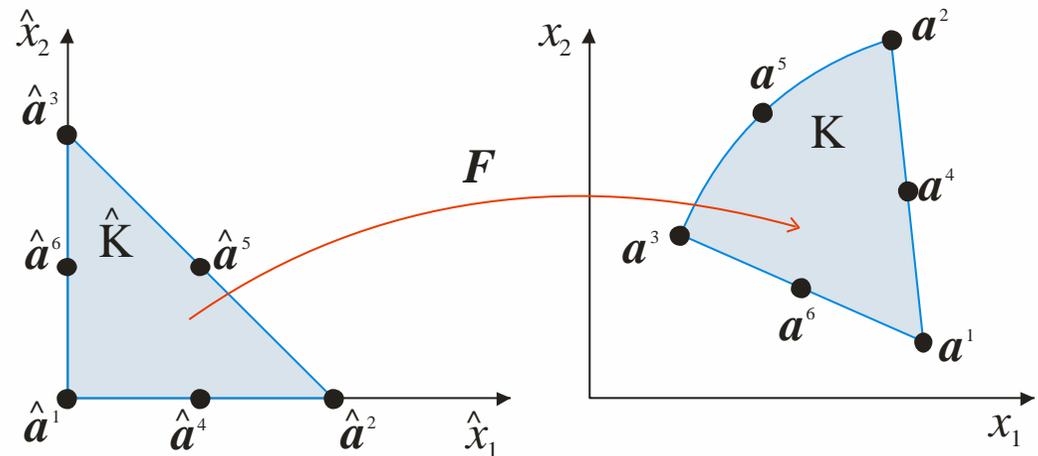
$$\Sigma_K = \{ \text{valores de la función en } \mathbf{a}^i = F(\hat{a}^i), i = 1, 2, \dots, m \}$$

4. Ahora, (K, P_K, Σ) constituye un elemento finito “curvo”.



Elementos curvos isoparamétricos

- Si en el mapeo $F=(F_1, F_2)$ las funciones son del mismo tipo que en P_K , el elemento se dice isoparamétrico.
- **Ejemplo:** sea \hat{K} el elemento de ref., con nodos $\hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{a}^3$ (en los vértices), $\hat{a}^4, \hat{a}^5, \hat{a}^6$ (en el centro de los lados).
 - $\Sigma_{\hat{K}} = \{\text{valores en los nodos}\}$
 - $P_{\hat{K}} = P_2(\hat{K})$.
 - $\hat{\phi}_i, i = 1, 2, \dots, 6$, func. de base en $P_2(\hat{K})$.

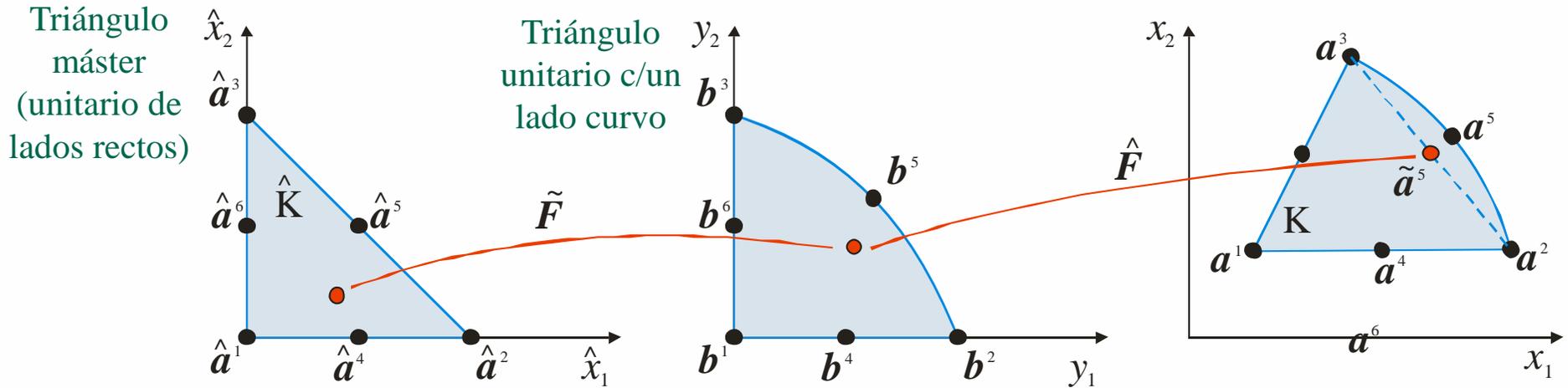


Elementos curvos isoparamétricos

- Definimos el mapeo $F(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^6 a^j \hat{\varphi}_j(\hat{\mathbf{x}})$, $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$
- Luego, escribimos $K = F(\hat{K}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K} \}$
- Se define el Jacobiano de F como $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$
- F es localmente 1-a-1 en una pequeña vecindad de c/punto $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$ si $\det J(\hat{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Necesitamos que F sea globalmente 1-a-1, i.e., que
$$\forall \mathbf{x} \in K, \exists ! \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K} / F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$$
- F será globalmente 1-a-1 si $\det J(\hat{\mathbf{x}}) \neq 0, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$.

Elementos curvos isoparamétricos

- Descompongamos F como $F(\hat{x}) = \hat{F}(\tilde{F}(\hat{x}))$



- \hat{F} , que mapea $b^j \equiv \hat{a}^j$ en a^j , $j=1,2,3$, tiene la forma:

$$\hat{F}(y) = \begin{bmatrix} a_1^2 - a_1^1 & a_1^3 - a_1^1 \\ a_2^2 - a_2^1 & a_2^3 - a_2^1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}y + \mathbf{b}.$$

Si los nodos a^1, a^2, a^3 no son coincidentes $\Rightarrow \det \mathbf{B} \neq 0 \Rightarrow \hat{F}$ es 1-a-1.

- Analícemos ahora el mapeo $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, que está definido por

$$\tilde{F}_i = \hat{x}_i + d_i \hat{x}_1 \hat{x}_2, \quad d_i = 4b_i^5 - 2, \quad i=1,2.$$

Elementos curvos isoparamétricos

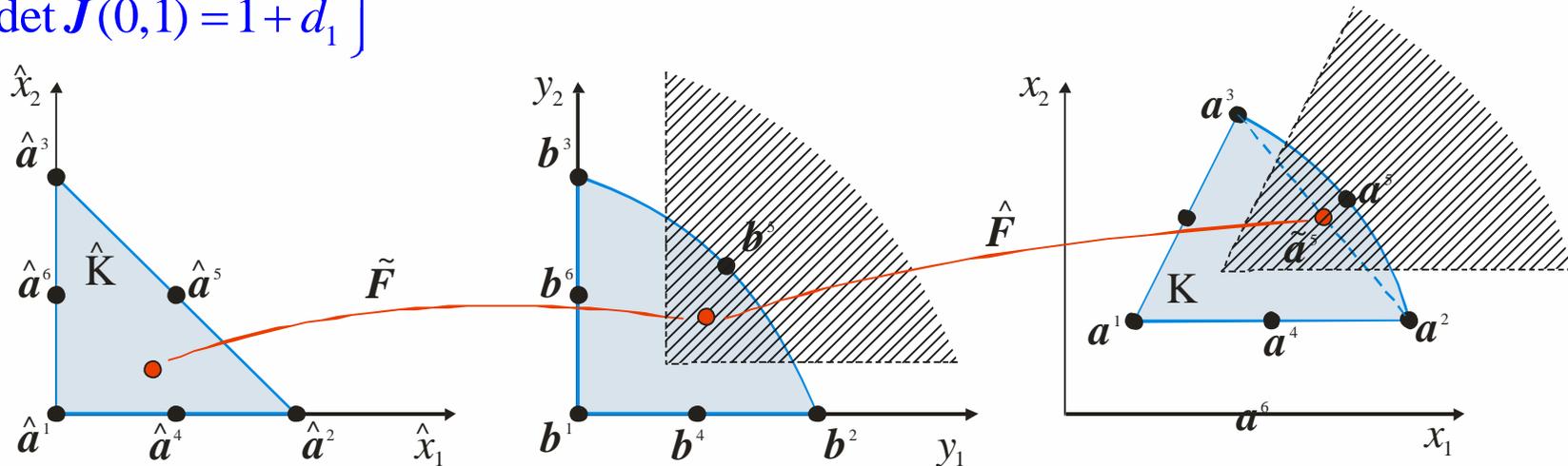
- Analicemos ahora el mapeo $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, que está definido por

$$\tilde{F}_i = \hat{x}_i + d_i \hat{x}_1 \hat{x}_2, \quad d_i = 4b_i^5 - 2, \quad i = 1, 2$$

con Jacobiano
$$\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 1 + d_1 \hat{x}_2 & d_1 \hat{x}_1 \\ d_2 \hat{x}_2 & 1 + d_2 \hat{x}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{x}}) = 1 + d_1 \hat{x}_2 + d_2 \hat{x}_1$$

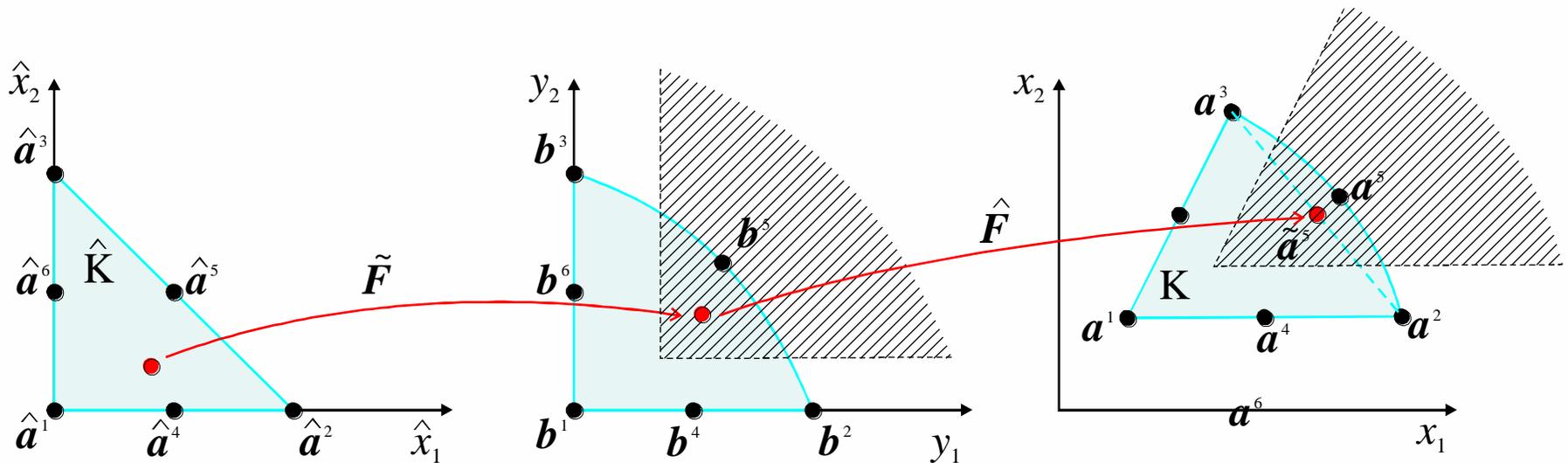
$\det \hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{x}})$ lineal en $\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \det \hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{x}}) > 0$ en $\hat{K} \Leftrightarrow \det \hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{x}}) > 0$ en los vértices $\hat{\mathbf{a}}^j, j = 1, 2, 3$.

$$\left. \begin{array}{l} \det \hat{\mathbf{J}}(0,0) = 1 \\ \det \hat{\mathbf{J}}(1,0) = 1 + d_2 \\ \det \hat{\mathbf{J}}(0,1) = 1 + d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \det \hat{\mathbf{J}} > 0 \text{ en } \hat{K} \text{ si } d_i > -1 \Rightarrow b_i > \frac{1}{4}, i = 1, 2.$$



Elementos curvos isoparamétricos

- Luego, \tilde{F} es 1-a-1 si b^5 y a^5 caen en las áreas sombreadas, para lo que \tilde{a}^5 debe estar suficientemente próximo a a^5 .
- El mapeo original F es 1-a-1 bajo las mismas condiciones.
- En un elemento K con un lado curvo, la dist. $|a^5 - \tilde{a}^5|$ es de $O(h_K^2)$.
- Luego, estando \tilde{a}^5 “cerca” de a^5 (mallas “poco distorsionadas”), el mapeo F será 1-a-1.



Elementos isoparamétricos

- **Error de interpolación:** Dada una función v sobre K , definimos el interpolante $\pi v \in P_K$ requiriendo que $\pi v(\mathbf{a}^i) = v(\mathbf{a}^i)$, $i=1, \dots, 6$. Si K es un triángulo común (como el visto anteriormente), entonces

$$\|v - \pi v\|_{H^s(K)} \leq Ch_K^{r-s} \|v\|_{H^r(K)}, \quad 0 \leq s \leq r \leq 3$$

- Esto también vale para triángulo curvo K , siempre que no sea demasiado curvo. Y esto se verifica en aplicaciones típicas, donde los elementos aproximan una frontera suave.

- **Espacio V_h :** Sea $T_h = \{K\}$ una malla de Ω , con elementos (K, P_K, Σ_K) , que pueden tener uno o más lados curvos. Sea Ω_h la unión de los elementos de T_h , que es una aproximación a Ω con frontera cuadrática a trozos. Se define

$$V_h = \left\{ v \in H^1(\Omega_h) : v|_K \in P_K, K \in T_h \right\}$$

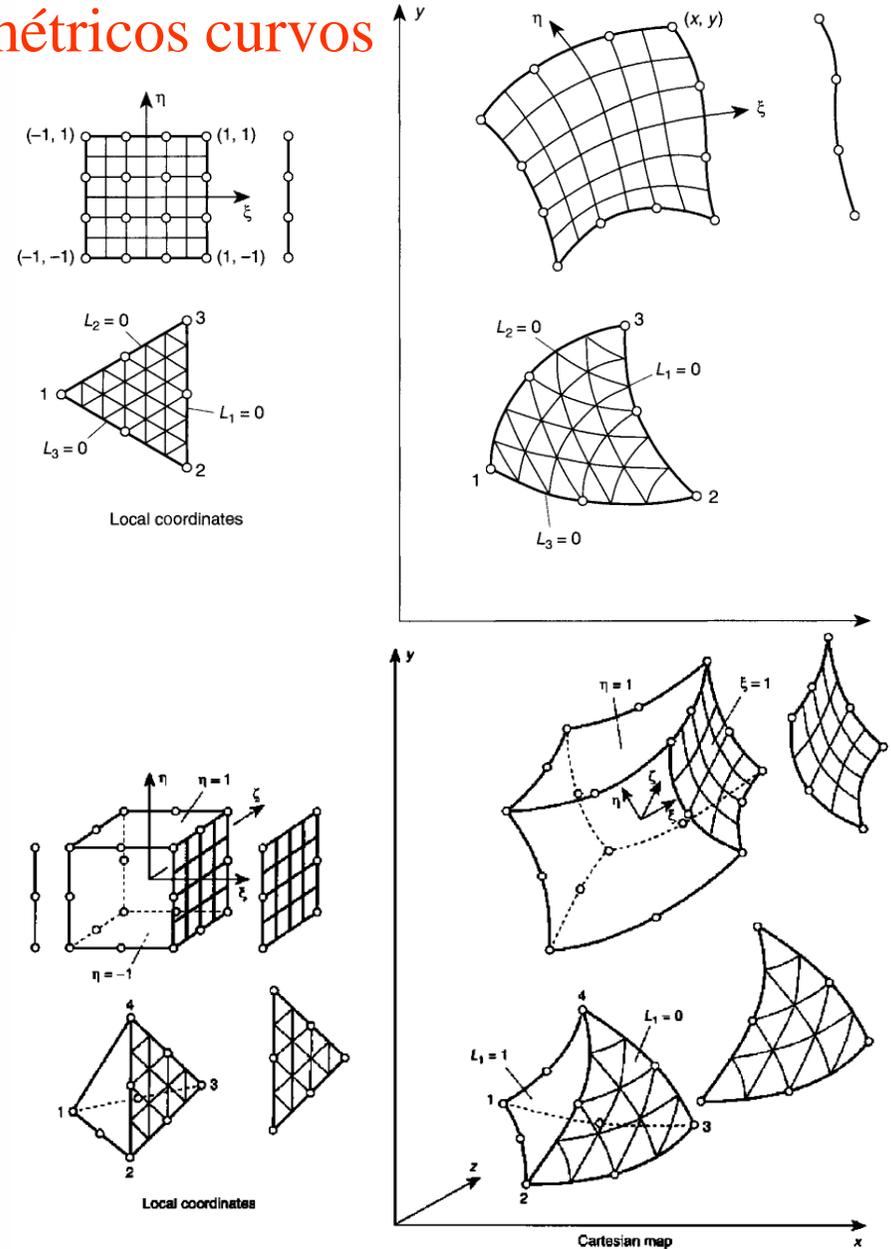
- Usando este espacio para el problema de Poisson, tenemos

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^3(\Omega)}, \quad \|u - u_h\|_{L_2(\Omega_h)} \leq Ch^3 \|u\|_{H^3(\Omega)}$$

Elementos isoparamétricos curvos

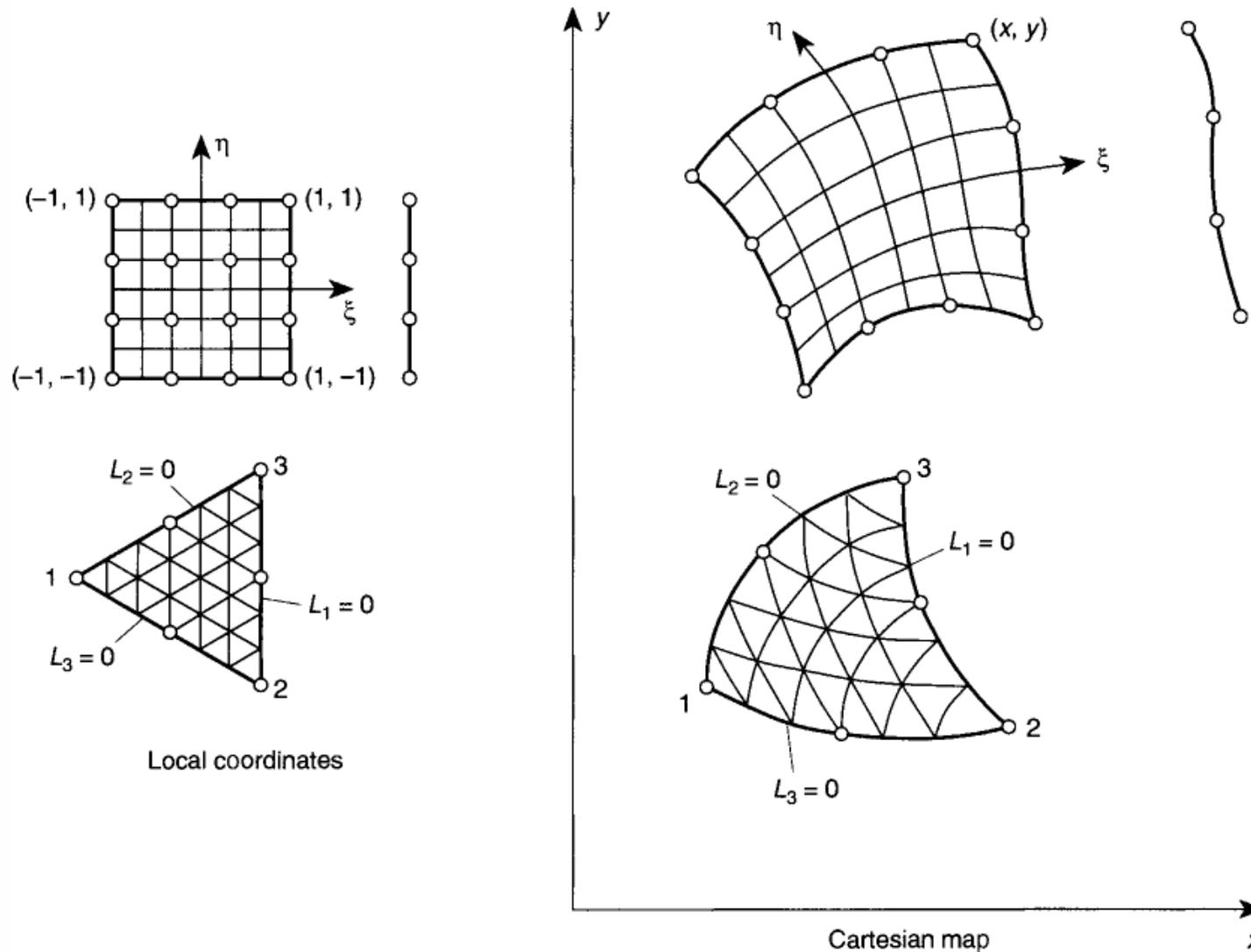
- Elementos de las formas básicas en 1D, 2D y 3D pueden mapearse a formas distorsionadas. De esta manera, las coord. locales $\xi\eta\zeta$ o $L_1 L_2 L_3 L_4$ se transforman en curvilíneas cuando se plotean en el sistema Cartesiano global xyz .
- Ello es posible si existe una correspondencia 1-a-1 entre las coord. Cartesianas y las curvilíneas, i.e. si se pueden establecer los mapeos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(\xi, \eta, \zeta) \\ f_y(\xi, \eta, \zeta) \\ f_z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} f_x(L_1, L_2, L_3, L_4) \\ f_y(L_1, L_2, L_3, L_4) \\ f_z(L_1, L_2, L_3, L_4) \end{bmatrix}$$



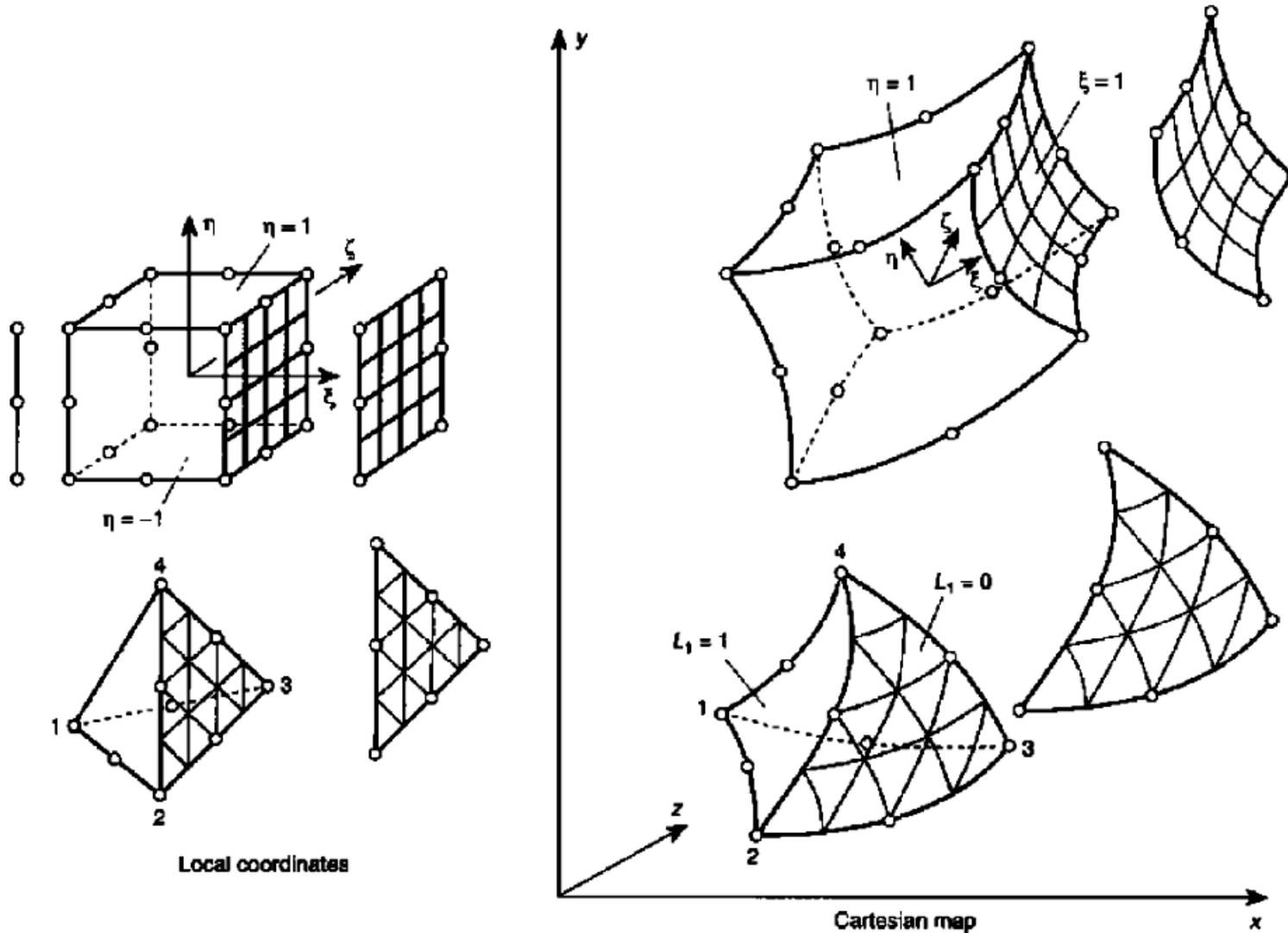
* Figuras extraídas de [ZT2000]

Elementos curvos: mapeo de elementos 2D



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Elementos curvos: mapeo de elementos 3D



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Coordenadas curvilíneas paramétricas

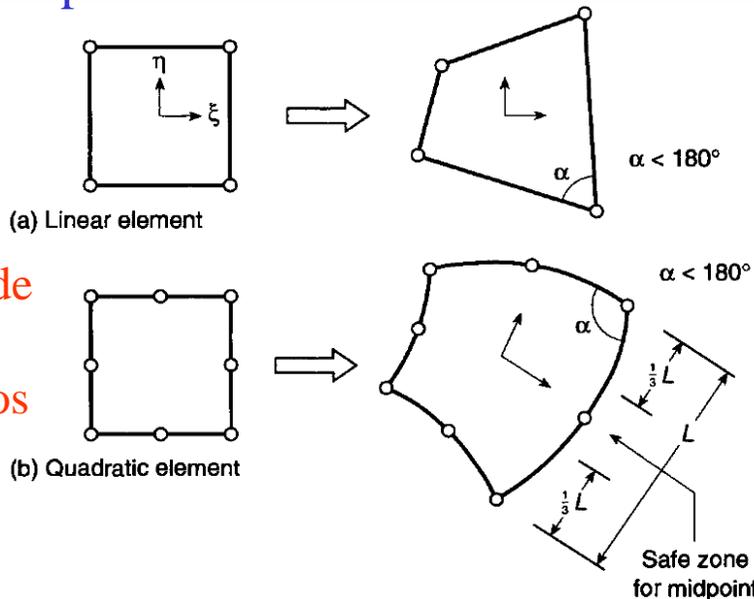
- La forma más simple de definir mapeos es usando funciones de forma N_i dadas en términos de las coords. locales sobre el elemento máster:

$$x = N_1(\xi, \eta, \zeta) x_1 + N_2(\xi, \eta, \zeta) x_2 + \dots$$

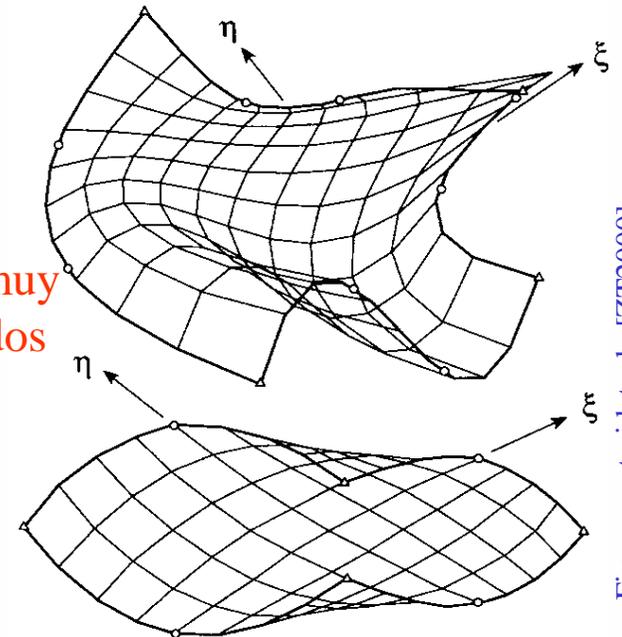
$$y = N_1(\xi, \eta, \zeta) y_1 + N_2(\xi, \eta, \zeta) y_2 + \dots$$

$$z = N_1(\xi, \eta, \zeta) z_1 + N_2(\xi, \eta, \zeta) z_2 + \dots$$

- A cada punto (ξ, η, ζ) en coords. locales debe corresponderle un solo punto (x, y, z) en coords. globales. Como ya vimos, elementos muy distorsionados pueden perder la unicidad.

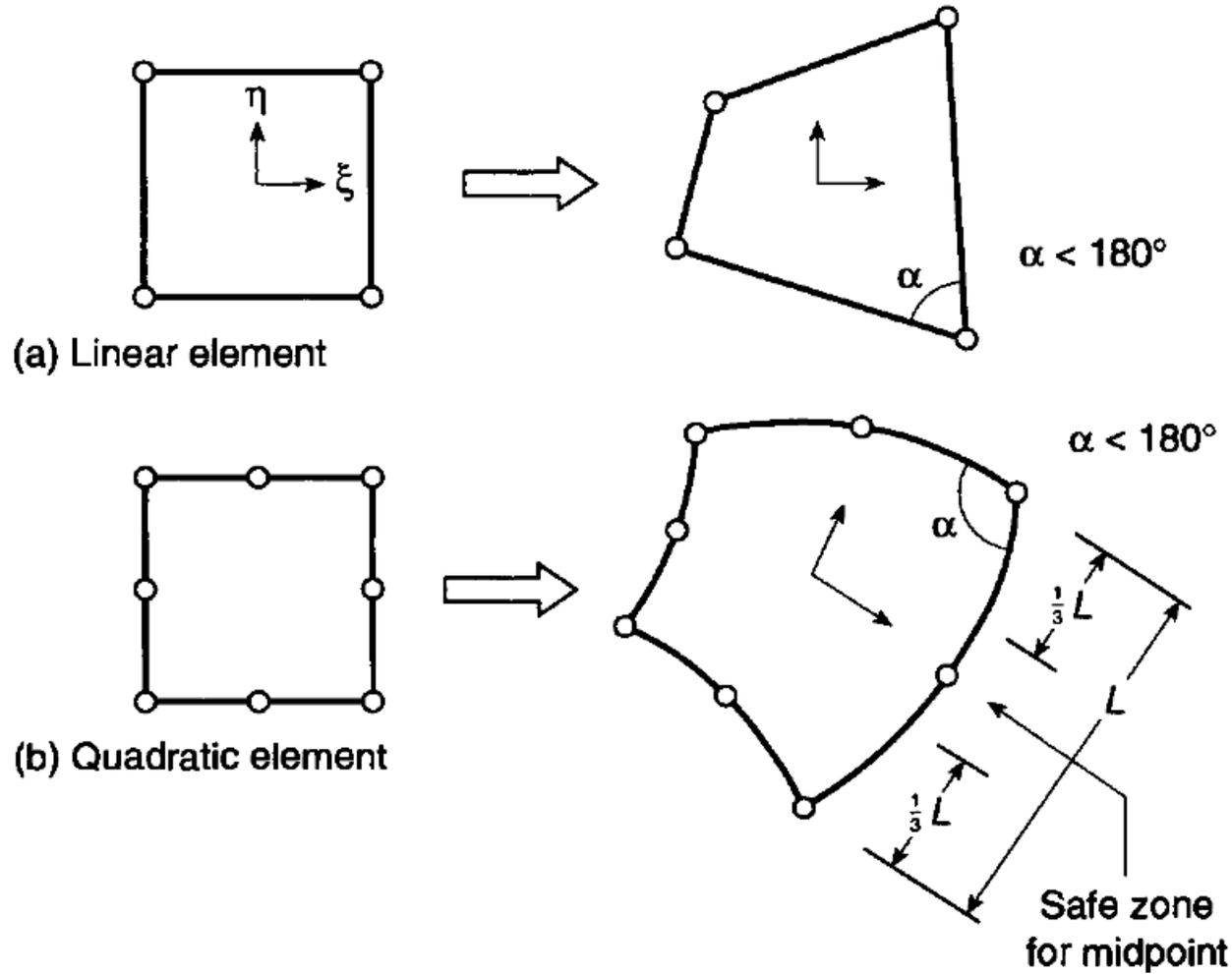


Pérdida de unicidad en elementos muy distorsionados



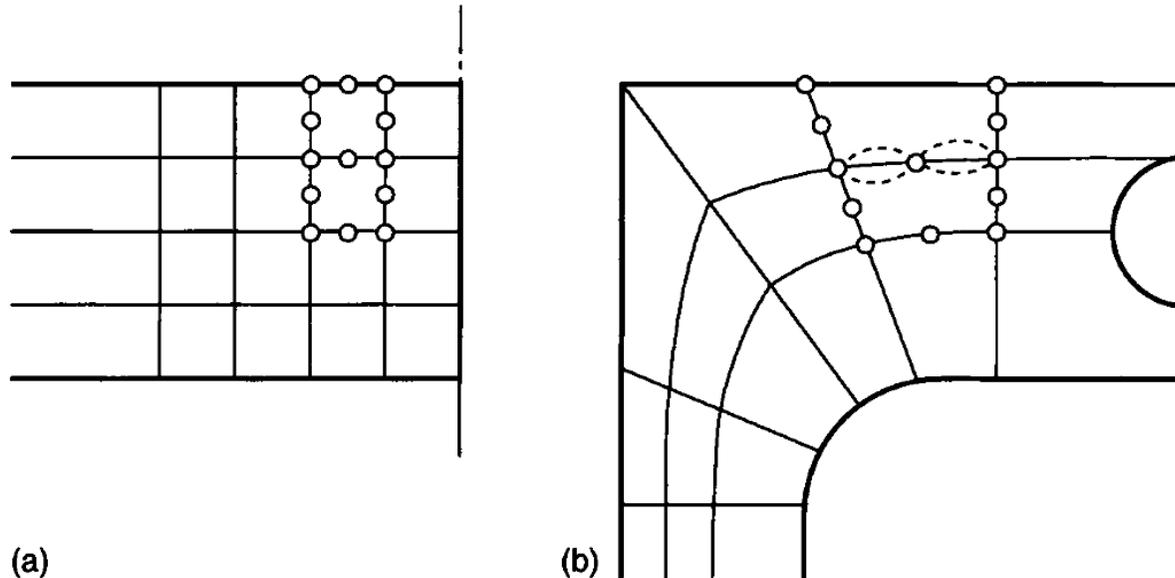
Requisitos de unicidad en cuadrángulos

Mapeos admisibles en cuadrángulos



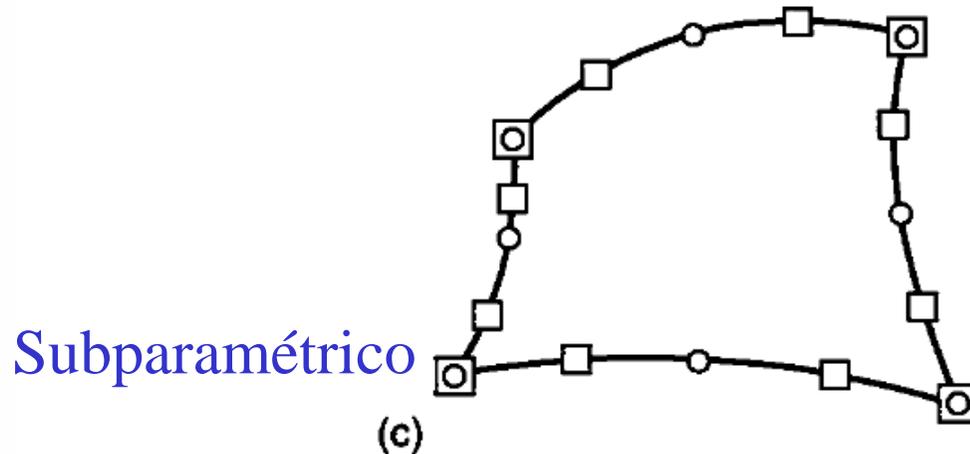
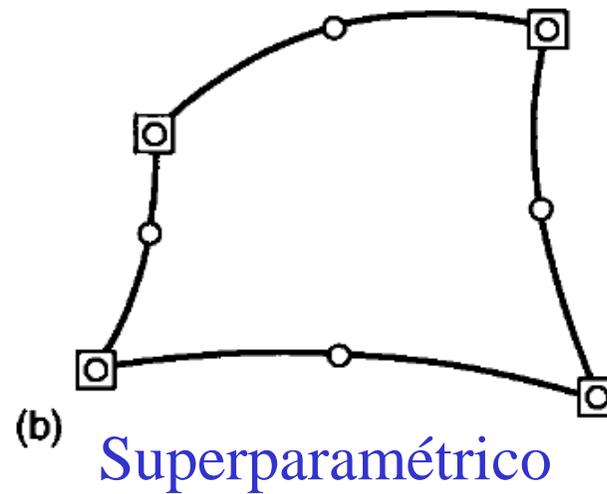
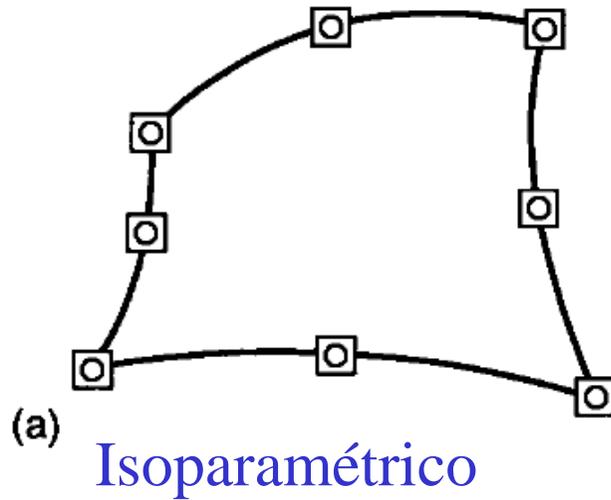
Conformidad geométrica y continuidad

- **Teorema 1:** Si dos elementos adyacentes son generados a partir de elementos máster (o de referencia) donde las funciones de forma son C_0 -continuas, entonces los elementos serán contiguos (compatibles).



- **Teorema 2:** Si las funciones de forma garantizan la continuidad C_0 de la solución en las coordenadas del elemento máster, luego también se satisfará continuidad C_0 en las coordenadas del elemento distorsionado.

Elementos isoparamétricos, superparamétricos y subparamétricos



- Punto en el que se especifica gdl
- Punto en el que se especifica coordenada

Cálculo de la matriz de rigidez

- Las funciones de base locales en K están dadas por

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}})) = \hat{\varphi}_j(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\varphi}_j(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})), \quad j = 1, \dots, 6.$$

- Para el problema de Poisson, deben calcularse las integrales

$$a_{ij}^K = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

- Por la regla de la cadena, siendo $\hat{\varphi}_j(\hat{\mathbf{x}}) = \varphi_j(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}))$, $j = 1, \dots, 6$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\nabla \varphi_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i$$

Cálculo de la matriz de rigidez

$$\mathbf{J}^{-T} = (\mathbf{J}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}\left(\left(\mathbf{J}^T\right)^T\right)}{\det \mathbf{J}^T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \text{adj}(\mathbf{J}) = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}}$$

Luego, la matriz de rigidez resulta, haciendo cambio de variables al elemento master:

$$a_{ij}^K = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \int_{\hat{K}} \left(\mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j \right) |\det \mathbf{J}| d\hat{x} = \int_{\hat{K}} \left(\mathbf{J}_0 \nabla \hat{\varphi}_i \right) \cdot \left(\mathbf{J}_0 \nabla \hat{\varphi}_j \right) \frac{d\hat{x}}{|\det \mathbf{J}|}$$

Integración numérica (o cuadratura)

- El cálculo analítico de matrices que involucran integrales sobre elementos curvos, particularmente en elementos de alto orden o en caso de heterogeneidad del material, puede volverse prácticamente imposible.
- Para evaluar integrales en MEF, se usan frecuentemente fórmulas de cuadratura:

$$\int_{\mathbb{K}} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n f(x^j) w_j \quad \begin{cases} x^j : \text{puntos de integración o de muestreo} \\ w_j : \text{peso correspondiente al punto } x^j \end{cases}$$

- Si esta fórmula es exacta para el polinomio de grado $r > 0$, luego el error de integración resulta

$$\left| \int_{\mathbb{K}} f(x) dx - \sum_{j=1}^n f(x^j) w_j \right| \leq Ch^{r+1} \sum_{|\alpha|=r+1} \int_{\mathbb{K}} |D^\alpha f| dx$$

- Puede mostrarse que para el elemento isoparamétrico cuadrático visto, calculando la matriz de rigidez por una regla de integración numérica que integre en forma exacta polinomios de grado $r = 2$, luego

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^2)$$

Integración numérica

En 1D, podemos aproximar tales integrales de la siguiente manera:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^n f(\xi_j) w_j \quad \begin{cases} \xi_j : \text{puntos de integración o de muestreo} \\ w_j : \text{peso correspondiente al punto } x^j \end{cases}$$

Dados los puntos de muestreo $\xi_j, j=1,2,\dots, n$, determinamos el polinomio

$$F_n(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \dots + \alpha_n \xi^{n-1} \quad \text{t.q.} \quad F_n(\xi_j) = f(\xi_j) :$$

$$\begin{cases} F_n(\xi_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_1^{n-1} = f(\xi_1) \\ \vdots \\ F_n(\xi_n) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_n + \dots + \alpha_n \xi_n^{n-1} = f(\xi_n) \end{cases} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

Luego:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_3 + \dots + \frac{1-(-1)^n}{n}\alpha_n$$

Integración numérica: método de Newton-Cotes

Eligiendo puntos de muestreo equiespaciados entre los extremos, se obtiene el **método de Newton-Cotes**.

Ejemplo: para $n=2$, $\xi_1=-1$, $\xi_2=1$:

$$F_2(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2)}{2} + \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{2} \xi$$

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F_2(\xi) d\xi = 2\alpha_1 = f(\xi_1) + f(\xi_2)$$

Nota:

- si la cantidad de puntos de evaluación n es par, se integra exactamente un polinomio de grado $n-1$;
- si la cantidad de puntos de evaluación n es impar, se integra exactamente un polinomio de grado n (ver ejemplo a continuación).

Integración numérica: método de Newton-Cotes

Ejemplo: para $n=3$, $\xi_1=-1$, $\xi_2=0$, $\xi_3=1$:

$$\text{Sea } f(\xi) = \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\xi^2 + \beta_4\xi^3$$

Esta función la aproximamos con $F(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2$ ($n=3$)

$$\begin{cases} F(-1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = f(-1) = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \\ F(0) = \alpha_1 = f(0) = \beta_1 \\ F(1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = f(\xi) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 + \beta_4 \\ \alpha_3 = \beta_3 \end{cases}$$

Luego con $n=3$ integramos en forma exacta un polinomio de grado 3:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi)d\xi = \int_{-1}^1 F(\xi)d\xi = 2\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_3$$

Integración numérica: método de Gauss-Legendre

En lugar de definir a priori la posición de los n puntos de muestreo, se la determinará de manera de obtener el mayor orden de precisión para n dado.

Se busca calcular en forma exacta la integral del polinomio F_p , ($p \geq n$ a determinar), cuya integral es

$$I = \int_{-1}^1 F_p(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n w_j (\alpha_1 + \alpha_2 \xi_j + \dots + \alpha_p \xi_j^{p-1}) = 2\alpha_1 + \frac{2}{3} \alpha_3 + \dots + \frac{1 - (-1)^p}{p} \alpha_p$$

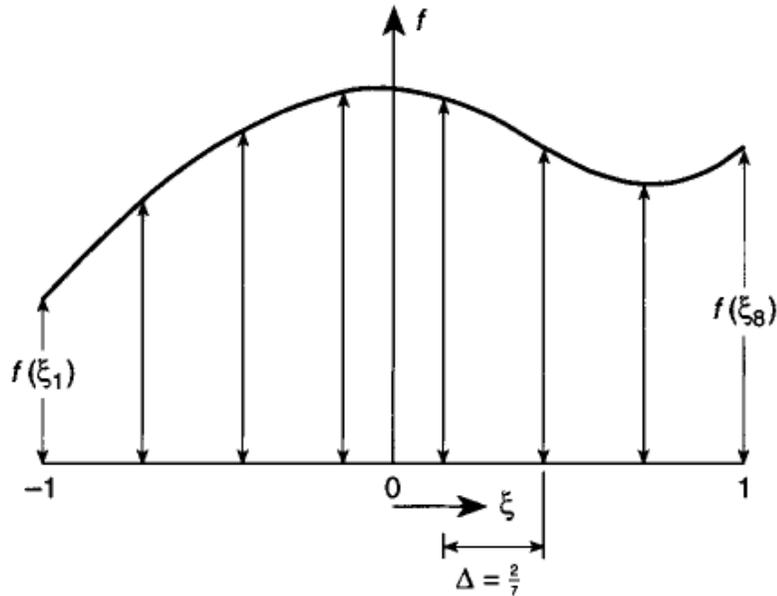
lo que da lugar al sistema de ecs.

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= 2 \\ w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + \dots + w_n \xi_n &= 0 \\ &\vdots \\ w_1 \xi_1^{p-1} + w_2 \xi_2^{p-1} + \dots + w_n \xi_n^{p-1} &= \frac{1 - (-1)^p}{p} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} p \text{ ecuaciones} \\ 2n \text{ incógnitas } (w_1, \dots, w_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \end{array}$$

que tendrá solución si $p = 2n$.

Integración numérica: Newton-Cotes vs Gauss Legendre

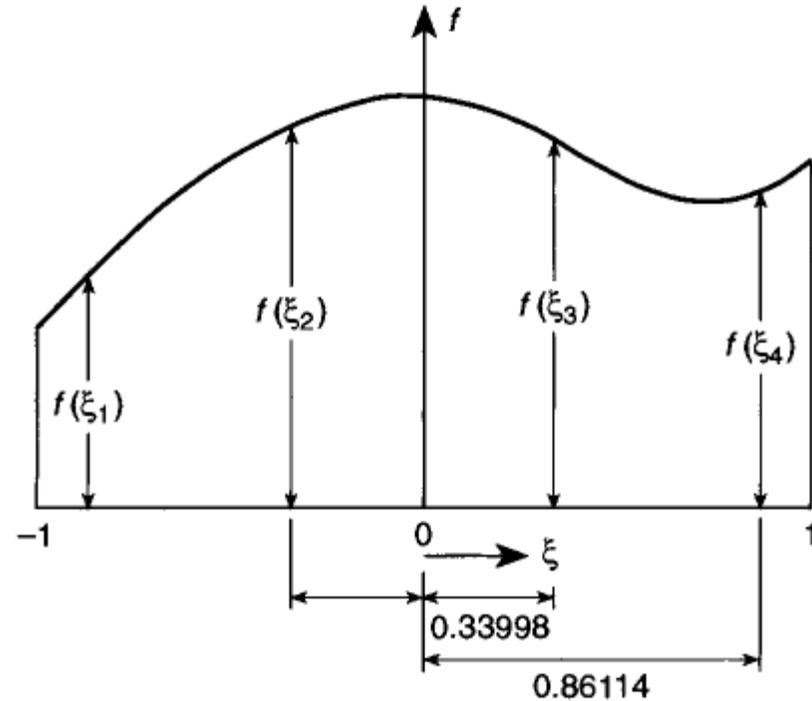
- Integración exacta de un polinomio de grado 7



Newton-Cotes

$n=8 \rightarrow$ 8 puntos de muestreo

\rightarrow pol grado 7 integrado exactamente



Gauss-Legendre

$n = 4 \rightarrow$ 4 puntos de muestreo

\rightarrow pol grado 7 integrado exactamente

* Figuras extraídas de [ZT2000]

Integración numérica de Gauss-Legendre

Table 9.1 Abscissae and weight coefficients of the gaussian quadrature formula $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$

$\pm a$		H	
0	$n = 1$	2.000 000 000 000 000	Pol integrado exactamente
$1/\sqrt{3}$	$n = 2$	1.000 000 000 000 000	Pol grado 1
$\sqrt{0.6}$	$n = 3$	$5/9$ $8/9$	Pol grado 3
0.000 000 000 000 000	$n = 4$	0.347 854 845 137 454 0.652 145 154 862 546	Pol grado 5
0.861 136 311 594 953 0.339 981 043 584 856	$n = 5$	0.236 926 885 056 189 0.478 628 670 499 366 0.568 888 888 888 889	Pol grado 7
0.906 179 845 938 664 0.538 469 310 105 683 0.000 000 000 000 000	$n = 6$	0.171 324 492 379 170 0.360 761 573 048 139 0.467 913 934 572 691	Pol grado 9
0.932 469 514 203 152 0.661 209 386 466 265 0.238 619 186 083 197	$n = 7$	0.129 484 966 168 870 0.279 705 391 489 277 0.381 830 050 505 119 0.417 959 183 673 469	Pol grado 11
0.949 107 912 342 759 0.741 531 185 599 394 0.405 845 151 377 397 0.000 000 000 000 000			Pol grado 13

* Tabla extraída de [ZT2000]

Integración numérica en cuadrados (2D) y cubos (3D)

- Se aplican las reglas de integración numérica 1D en cada dirección.

$$I_{2D} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$$

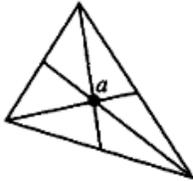
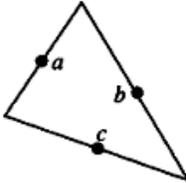
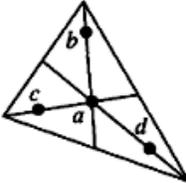
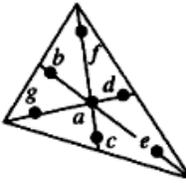
$$I_{3D} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k$$

Integración numérica en triángulos

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2) dL_1 dL_2$$

$$\approx \sum_{j=0}^n f(L_1^j, L_2^j) H_j$$

Table 9.2 Numerical integration formulae for triangles

Order	Figure	Error	Points	Triangular coordinates	Weights
Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$
Quintic		$R = O(h^6)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.225 000 000 0 0.132 394 152 7 0.125 939 180 5

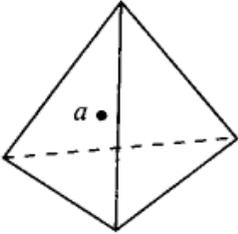
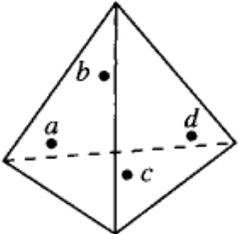
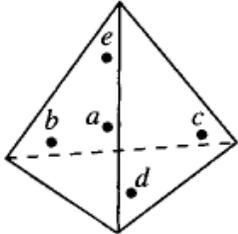
with
 $\alpha_1 = 0.059\ 715\ 871\ 7$
 $\beta_1 = 0.470\ 142\ 064\ 1$
 $\alpha_2 = 0.797\ 426\ 985\ 3$
 $\beta_2 = 0.101\ 286\ 507\ 3$

* Tabla extraída de [ZT2000]

Integración numérica en tetraedros

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 dL_3 \approx \sum_{j=0}^n f(L_1^j, L_2^j, L_3^j) H_j$$

Table 9.3 Numerical integration formulae for tetrahedra

No.	Order	Figure	Error	Points	Tetrahedral coordinates	Weights
1	Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
2	Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c d	$\left. \begin{array}{l} \alpha, \beta, \beta, \beta \\ \beta, \alpha, \beta, \beta \\ \beta, \beta, \alpha, \beta \\ \beta, \beta, \beta, \alpha \end{array} \right\}$ $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$\frac{1}{4}$
3	Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d e	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \end{array} \right\}$	$-\frac{4}{5}$ $\frac{9}{20}$

* Tabla extraída de [ZT2000]

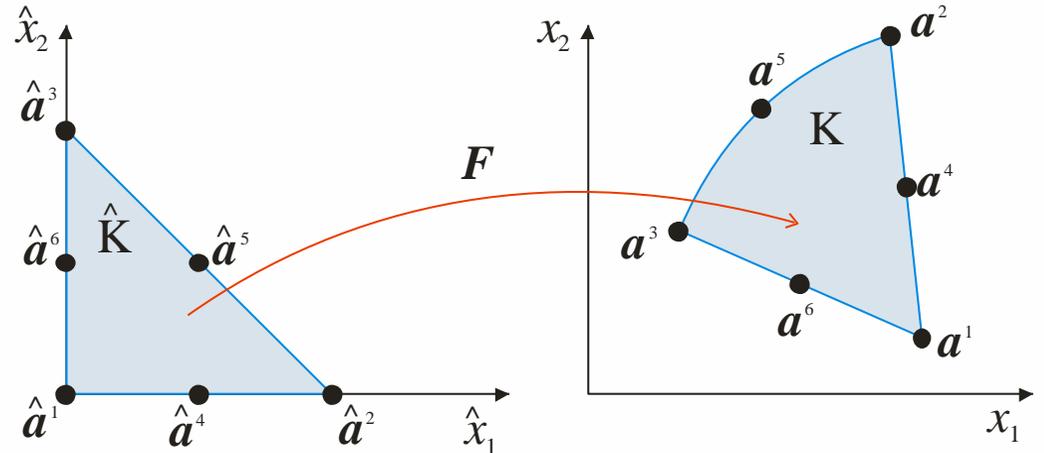
Ejemplo

Coordenadas de área en triángulo máster (unitario):

$$\hat{\lambda}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$$

$$\hat{\lambda}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1$$

$$\hat{\lambda}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2$$



Funciones de base en elemento máster:

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\lambda}_1(2\hat{\lambda}_1 - 1) = (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)(1 - 2\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2)$$

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\lambda}_2(2\hat{\lambda}_2 - 1) = \hat{x}_1(2\hat{x}_1 - 1)$$

$$\hat{\phi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\lambda}_3(2\hat{\lambda}_3 - 1) = \hat{x}_2(2\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_4(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 = 4(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)\hat{x}_1$$

$$\hat{\phi}_5(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 4\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 = 4\hat{x}_1\hat{x}_2$$

$$\hat{\phi}_6(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3 = 4(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)\hat{x}_2$$

$$\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^6 \hat{\phi}_j(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{a}^j, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^6 \hat{\phi}_j(\hat{\mathbf{x}}) \begin{Bmatrix} a_1^j \\ a_2^j \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^6 \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{a}^k, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathbf{K}}$$

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} F_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ F_2(\hat{\mathbf{x}}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_5 \\ \hat{\phi}_6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \hat{\phi}_k}{\partial \hat{x}_j}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{a}^k$$

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_5}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\phi}_5}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_6}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\phi}_6}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_1} = -3 + 4\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_1} = 4\hat{x}_1 - 1$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_1} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_1} = 4(1 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_5}{\partial \hat{x}_1} = 4\hat{x}_2$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_6}{\partial \hat{x}_1} = -4\hat{x}_2$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_2} = -3 + 4\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_2} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_2} = 4\hat{x}_2 - 1$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_2} = -4\hat{x}_1$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_5}{\partial \hat{x}_2} = 4\hat{x}_1$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_6}{\partial \hat{x}_2} = 4(1 - \hat{x}_1 - 2\hat{x}_2)$$

Ejemplo

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \approx \sum_{j=1}^n f(\hat{x}_1^j, \hat{x}_2^j) w_j$$

$$a_{ij}^K = \int_{\hat{K}} \left(\mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\phi}_i \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\phi}_j \right) |\det \mathbf{J}| d\hat{\mathbf{x}}$$
$$\approx \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{J}^{-T}(\hat{\mathbf{x}}^j) \nabla \hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{x}}^j) \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{-T}(\hat{\mathbf{x}}^j) \nabla \hat{\phi}_j(\hat{\mathbf{x}}^j) \right) w_j |\det \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}^j)|$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}$$

```

function [row,col,sk] = stiffquad (in,xx,iel,conec,locel)
%
% Generacion de la matriz de rigidez
% Elemento cuadrangulo lineal isoparametrico p/problema conduccion de calor
%
% in:      Numeros de nodo
% xx:      Tabla de coordenadas
% iel:     Numeros de elemento
% conec:   Tabla de conectividades
% locel:   Tabla de vectores de localizacion
%
nel = length (iel);

npgxi = 2;
npgeta = 2;
% Genera vector inn cuya componente "i" da la posicion donde se
% almacenan las coordenadas del nodo "i" en la tabla "xx"

inn = zeros(max(in),1);
for i=1:length(in)
    j      = in(i);
    inn(j) = i;
end

% row, col, sk dan los indices de fila, columna y contenido de la matriz
% de rigidez en almacenamiento sparse
row = zeros(16*nel,1);
col = zeros(16*nel,1);
sk  = zeros(16*nel,1);

in1 = 0;
X1 = zeros(4,1);
Y1 = zeros(4,1);

```

```

for iel = 1:nel

    for k=1:4
        X1(k) = xx(inn(conec(iel,k)),1);
        Y1(k) = xx(inn(conec(iel,k)),2);
    end

    K = zeros(4,4);
    for ipg = 1:npgxi*npgeta
        [xi, eta, weight] = integ2D (ipg, npgxi, npgeta);

        B = 0.25*[
            (1+eta),      -(1+eta),      -(1-eta),      (1-eta);
            (1+xi),      , (1-xi),      , -(1-xi),      , -(1+xi)      ];

        Jac = B * [X1, Y1];
        dJac = det(Jac);
        JacinvT = inv(Jac)';

        GradPhi = JacinvT*B;

        K = K + GradPhi'*GradPhi*dJac*weight;
    end

    for i = 1:4
        for j=1:4
            in1 = in1 + 1;
            row(in1) = inn(locel(iel,i));
            col(in1) = inn(locel(iel,j));
            sk(in1) = K(i,j);
        end
    end
end
end
end

```

```

function [xi, eta, weight] = integ2D (ipg, npgxi, npgeta)

% calcula puntos de Gauss y pesos para integracion en cuadrangulo 2D

xpg = [ 0          0          0          0          ;
        -1/sqrt(3)  1/sqrt(3)  0.         0.         ;
        -sqrt(0.6)  0.         sqrt(0.6)  0.         ;
        -0.861136311594953  -0.339981043584856  0.339981043584856  0.861136311594953  ];

xw = [ 2.         0.         0.         0.         ;
        1.         1.         0.         0.         ;
        5./9.      8./9.      5./9.      0.         ;
        0.347854845137454  0.652145154862546  0.652145154862546  0.347854845137454  ];

ipgxi = rem ((ipg-1),npgxi) + 1;
ipgeta = floor((ipg-1)/npgxi) + 1;

xi     = xpg(npgxi, ipgxi );
eta    = xpg(npgeta, ipgeta);
weight = xw(npgxi, ipgxi )*xw(npgeta, ipgeta);

```

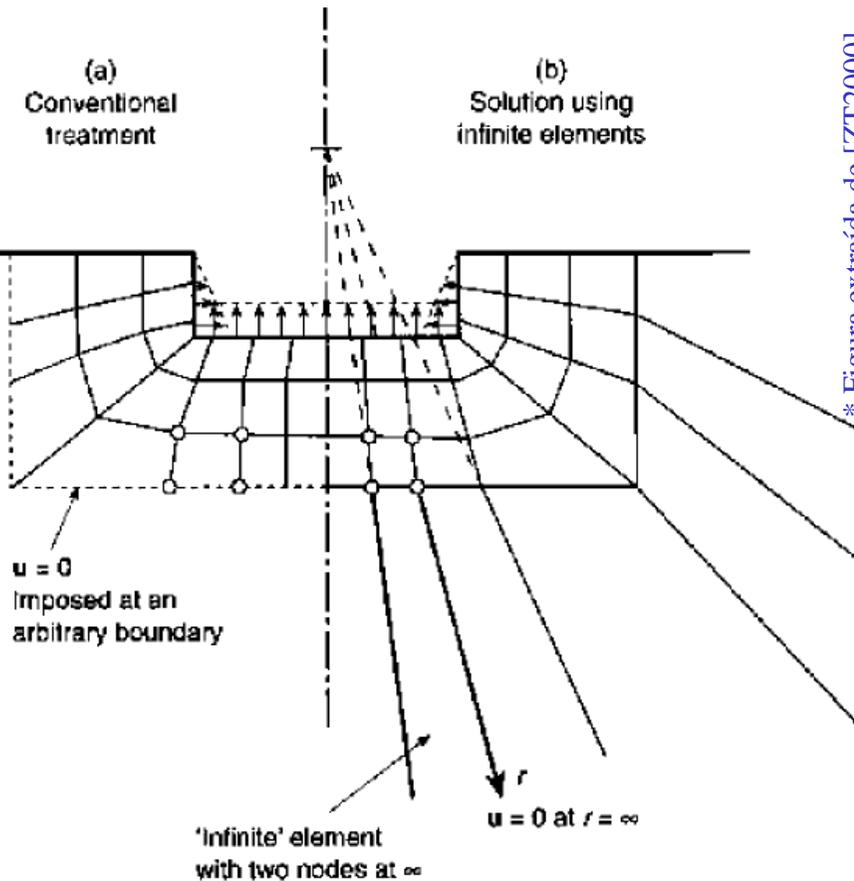
Elementos infinitos

En muchos problemas ingenieriles, el dominio es infinito o semi-infinito, y se especifican CB a dist. infinita.

1. Solución usando MEF convencional: se malla una porción suficientemente grande del dominio, a fin de imponer las CB a una dist. grande, con las sigtes. desventajas.

- Si esa dist. no es lo suficientemente grande, se introduce un error en el modelo.
- Se deben introducir muchos elementos en una región que suele ser de poco interés para el analista.

2. Solución usando elementos infinitos, en los que un mapeo particular, permite transformar elementos semi-infinitos a los elementos master básicos. Estos elementos se ensamblan luego con los elementos finitos de la malla.



* Figura extraída de [ZT2000]

Elementos infinitos

- Consideremos el mapeo 1D a lo largo de CPQ:

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_Q = \bar{N}_C x_C + \bar{N}_Q x_Q \quad (1)$$

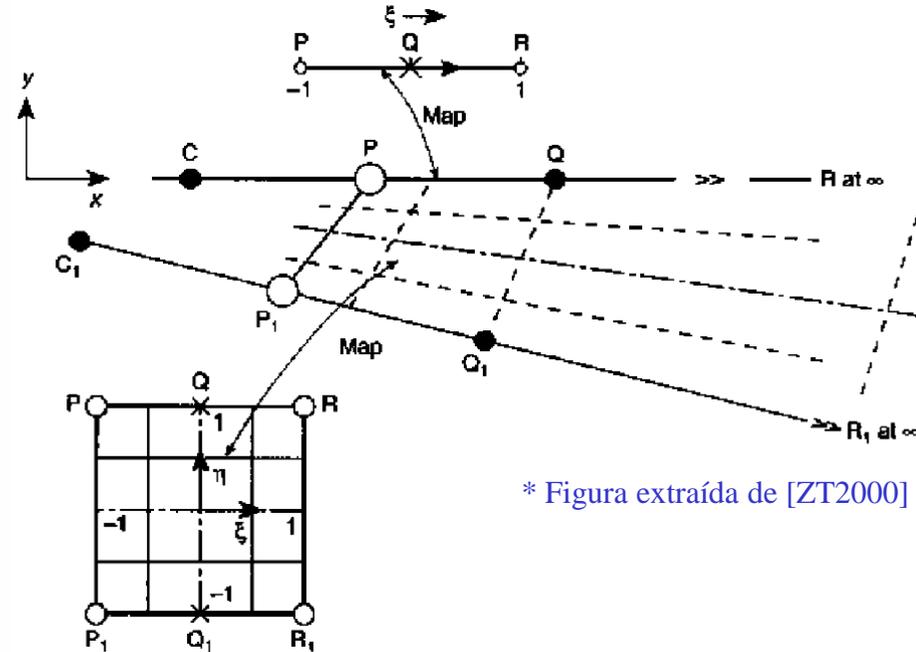
- Se observa que:

$$\begin{cases} x = \frac{x_C + x_Q}{2} = x_P & \text{si } \xi = -1 \\ x = x_Q & \text{si } \xi = 0 \\ x = x_R = \infty & \text{si } \xi = 1 \end{cases}$$

- Luego, reemplazando x_C por x_P :

$$x = \left(1 + \frac{2\xi}{1-\xi}\right) x_Q - \frac{2\xi}{1-\xi} x_P = N_Q x_Q + N_P x_P \quad (2)$$

- Muchas otras funciones podrían usarse en (1) y (2), siempre que $\bar{N}_C + \bar{N}_Q = N_P + N_Q = 1$.



* Figura extraída de [ZT2000]

Elementos infinitos (cont.)

- Ahora, si aproximamos la solución por un polinomio:

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots$$

- Dado $x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_Q$

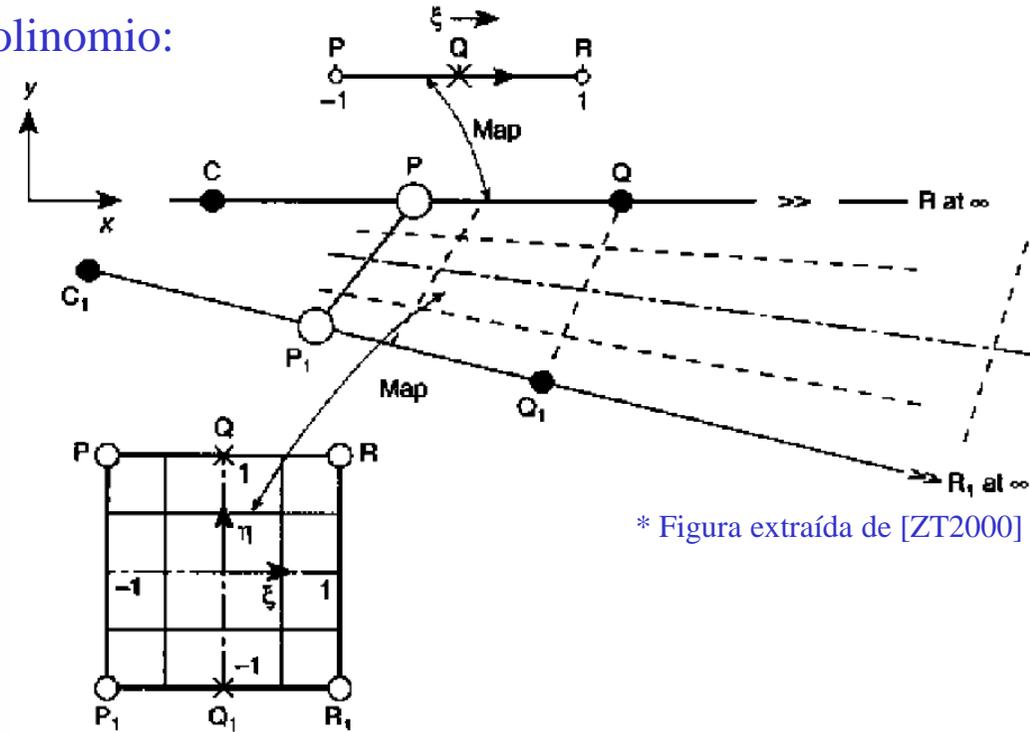
$$\Rightarrow \xi = 1 - \frac{x_Q - x_C}{x - x_C} = 1 - \frac{x_Q - x_C}{r}$$

- Obtenemos entonces la solución típica de campo lejano para regiones exteriores:

$$u = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \dots$$

- El punto C representa el origen de decaimiento. Su correcta ubicación en base a la física del problema permite mejorar la precisión de la solución.
- Equivalentemente, a lo largo de $C_1P_1Q_1$ tenemos el mapeo

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_{Q_1}, \quad y = -\frac{\xi}{1-\xi} y_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) y_{Q_1}$$



Elementos infinitos (cont.)

- El mapeo se completa en la dirección η usando las funciones de forma lineales standard

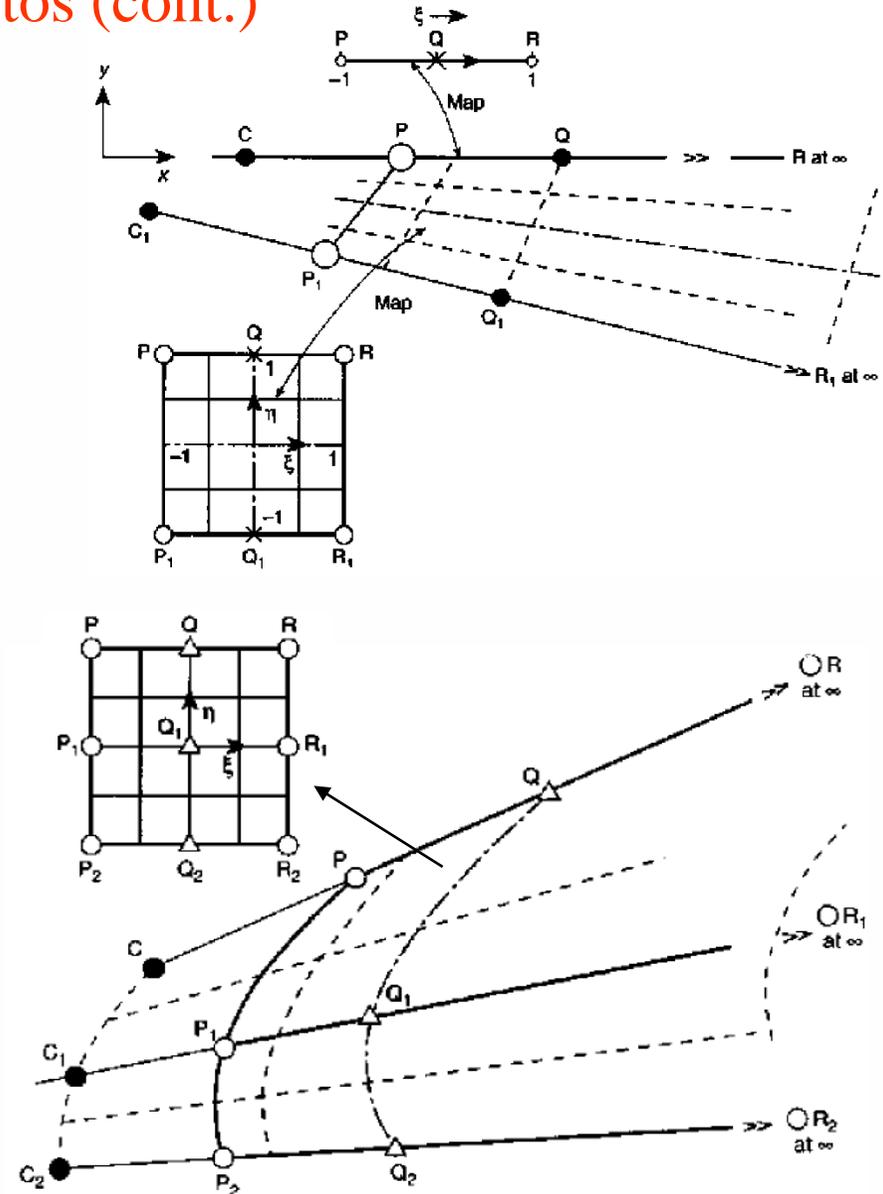
$$N_1(\eta) = \frac{1+\eta}{2}, N_0(\eta) = \frac{1-\eta}{2}.$$

- Luego:

$$x = N_1(\eta) \left[-\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) x_Q \right] + N_0(\eta) \left[-\frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) x_{Q_1} \right]$$

$$y = N_1(\eta) \left[-\frac{\xi}{1-\xi} y_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) y_Q \right] + N_0(\eta) \left[-\frac{\xi}{1-\xi} y_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) y_{Q_1} \right]$$

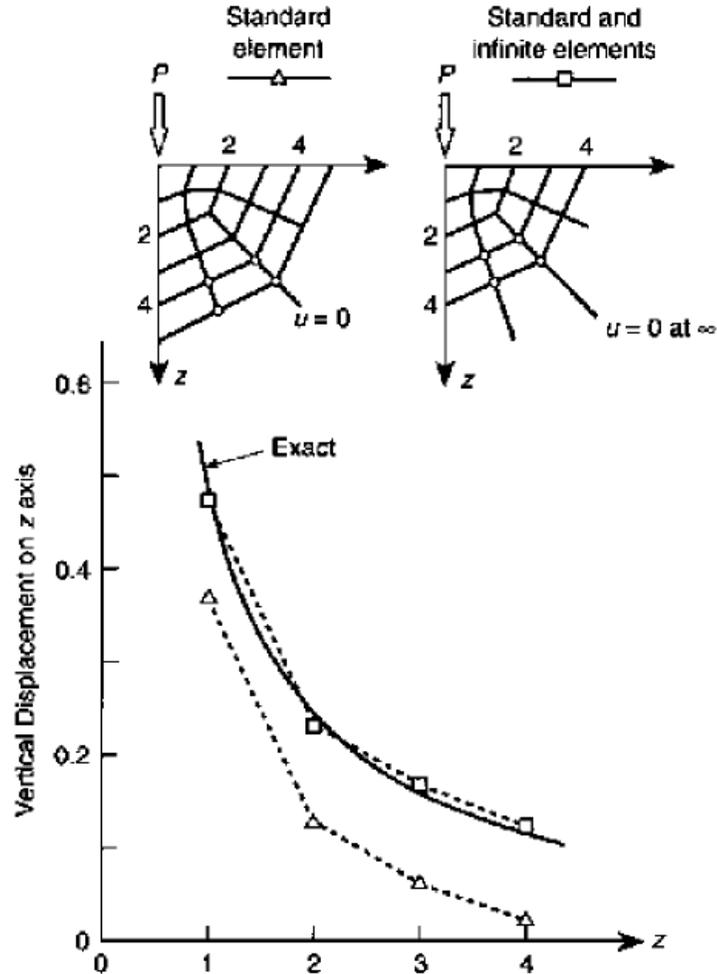
- En dirección η podrían usarse funciones de mayor orden, lo que permite ensamblar elementos infinitos con elementos finitos de mayor orden.



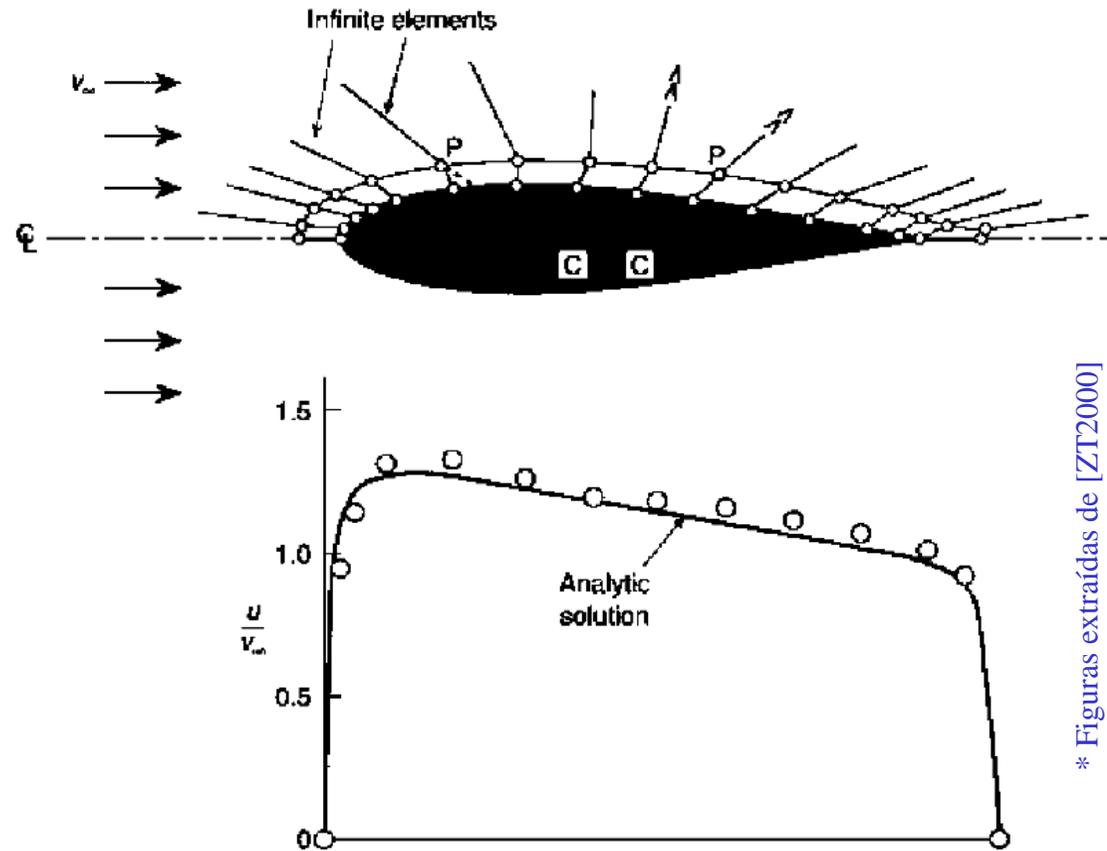
* Figuras extraídas de [ZT2000]

Ejemplos de aplicación de elementos infinitos

Problema de Boussinesq: carga puntual en un medio semi-infinito



Flujo irrotacional alrededor de un ala



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Orden de integración numérica necesario

Dado el costo computacional que implica un mayor número de puntos de integración, es conveniente determinar:

1. Menor orden de integración que no comprometa la convergencia.
2. Orden de integración necesario para mantener la misma tasa de convergencia que si se usara integración exacta.

Mínimo orden de integración para convergencia: en un problema habrá convergencia si puede reproducirse cualquier valor constante de la m -ésima derivada. Si $m=1$, ello requiere que el volumen del elemento sea calculado de manera exacta.

Orden de integración para no deteriorar la convergencia: usando MEF standard (Galerkin), con interpolación polinomial de grado p , para problemas que involucren derivadas de orden m , el error es $O(h^{2(p-m)+1})$. Si el error de integración es a lo sumo de ese orden, no se perderá convergencia.