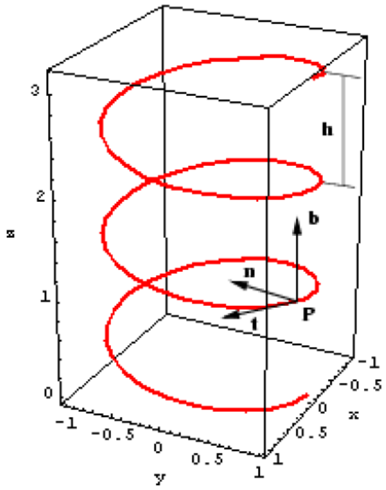
Universidad Nacional del Litoral

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Trabajo Práctico Número 2: Vectores y Tensores Cartesianos

1. Una partícula está restringida a moverse en una curva helicoidal circular como la de la figura, cuyo radio es a y paso h, con velocidad (magnitud) v. ¿Cual es la aceleración de la partícula P ? Expresar los vectores velocidad y aceleración en función de los vectores unitarios $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ que son, tangente, normal y binormal a la curva en P, respectivamente.



Ayuda:

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \qquad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$$

$$\mathbf{n}' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} - \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\bullet\mathbf{t}\right)\mathbf{t} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}'}{\|\mathbf{n}'\|}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$$

2. Probar que:

   a. $\delta_{ii} = 3$

   b. $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$

   c. $e_{ijk}e_{jki} = 6$

   d. $e_{ijk}A_jA_k = 0$

   e. $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$

   f. $\delta_{ij}e_{ijk} = 0$

3. Probar la siguiente identidad usando elementos de geometría

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\bullet\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})\mathbf{C}$$

4. Probar el ejercicio anterior usando notación indicial.

5. Probar que si $A_{\alpha_1 \cdots \alpha_R}$ y $B_{\alpha_1 \cdots \alpha_R}$ son dos tensores de orden R, la ecuación

$$A_{\alpha_1 \cdots \alpha_R}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = B_{\alpha_1 \cdots \alpha_R}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

es una ecuación tensorial; y por ello si es *válida en un sistema de coordenadas cartesianas* lo es *en cualquier sistema de coordenadas cartesianas*.

6. Probar usando notación indicial que la contracción de dos índices cualesquiera de un tensor Cartesiano de orden *n* es un tensor cartesiano de orden $n-2$.

7. Probar (usando notación indicial) que si A_{ij} es un tensor de rango 2, A_{ii} es un escalar.

8. Siendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vectores, usar notación indicial para probar:

   a. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

   b. $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

   c. $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$

   d. $(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \bullet \mathbf{a})(\mathbf{d} \bullet \mathbf{b}) - (\mathbf{c} \bullet \mathbf{b})(\mathbf{d} \bullet \mathbf{a})$

9. Sea $\mathbf{r}$ un radio vector y *r* su magnitud. Probar usando notación indicial (siendo *n* un número entero):

   a. $\nabla \bullet \left(r^n \mathbf{r}\right) = (n+3) r^n$

   b. $\nabla \times \left(r^n \mathbf{r}\right) = 0$

   c. $\Delta\left(r^n\right) = n(n+1) r^{n-2}$

10. Usando notación indicial probar las siguientes identidades ($\phi\left(x_1, x_2, x_3\right)$: función escalar; $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: campos vectoriales)

    a. $\nabla \bullet (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \Delta \phi$

    b. $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$

    c. $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

    d. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$

    e. $\nabla \bullet (\phi \mathbf{u}) = \nabla \phi \bullet \mathbf{u} + \phi \nabla \bullet \mathbf{u}$

    f. $\nabla \times (\phi \mathbf{u}) = \nabla \phi \times \mathbf{u} + \phi (\nabla \times \mathbf{u})$

    g. $\nabla \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \bullet (\nabla \times \mathbf{v})$

    h. $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \bullet \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\nabla \bullet \mathbf{u}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \bullet \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \bullet \nabla) \mathbf{v}$

11. Es sabido que las rotaciones son no-conmutativas. Por ejemplo, tome un libro, y fije un sistema de coordenadas con ejes x, y, z dirigidos a lo largo de los lados del libro. Luego, rote primero el libro 90º en torno a y; luego rotelo 90º en torno a z obteniendo

una cierta configuración. Si invierte el orden de rotación, verá obtiene un resultado distinto.

La rotación de coordenadas también es no-conmutativa; en otras palabras, el producto de las matrices β_{ij} es no-conmutativo. Demuestre esto en el caso especial análogo a la rotación del libro mencionada más arriba. Primero transforme x, y, z a x', y', z' mediante una rotación de 90º en torno al eje y; luego transforme x', y', z' a x'', y'', z'' mediante una rotación de 90º en torno al eje z'. O sea:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Obtenga la matriz de transformación de x, y, z a x'', y'', z''. Luego invierta el orden de rotación y muestre que se logra un resultado distinto.

12. Las rotaciones infinitesimales son, sin embargo, conmutativas. Demuestre esto considerando una rotación infinitesimal de un ángulo θ en torno a y seguida de otra rotación infinitesimal de un ángulo ψ en torno al eje z. Compare los resultados con el caso en que el orden de rotaciones es invertido.

13. Demostrar que para una matriz $\mathbf{A}$ de 3×3, se verifica:

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$